

Mathematik I WS 2014/15
4. Übungsblatt
11.11.2014

Aufgabe 4.1. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a) $a_n = \frac{7^n - 2^n}{7^{n+2} + 6^n}$

(b) $a_n = \frac{8^n}{3^n - 5^n}$

(c) $a_n = \frac{3^{n+8} + (-4)^n}{4^{n+3} - 3^n}$

Aufgabe 4.2. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a) $a_n = \frac{3n^2 + 2n - 4}{2n^2 - 5}$

(b) $a_n = \frac{-4n^2 + 5n + 2}{2n - 1}$

(c) $a_n = \sqrt{2n + 6} - \sqrt{2n - 1}$

Aufgabe 4.3. Verwenden Sie (ohne Beweis) den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

um zu zeigen:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $b > 1$.

Aufgabe 4.4. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a) $a_n = \frac{(n^4 + 2n)4^n + n3^{n+2}}{5^{n-3}}$

(b) $a_n = \sqrt{n + 6} - \sqrt{4n - 3}$

Aufgabe 4.5. Welche dieser Folgen sind monoton? Welche sind beschränkt?

(a) $a_n = (-1)^n n$

(b) $a_n = \frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}$

Aufgabe 4.6. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie gegebenenfalls den Limes Superior und Limes Inferior der Folgen

(a) $a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

(b) $a_n = n + (-1)^n n$

(c) $a_n = 2 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Aufgabe 4.7. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist rekursiv durch

$$a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 8 \quad \text{und} \quad a_n = -3a_{n-1} + 25a_{n-2} - 21a_{n-3} \quad \text{für } n \geq 4$$

definiert. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung für a_n .