

**Mathematik I WS 2014/15**  
**6. Übungsblatt**  
**25.11.2014**

Bei den Aufgaben auf diesem Blatt dürfen Sie keine Differentialrechnung verwenden!

**Aufgabe 6.1.** Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche sind ungerade? (Nachweis!)

(a)  $f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x)$       (b)  $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$       (c)  $h(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$

**Aufgabe 6.2.** Bestimmen Sie für die Funktion  $f(x) = \frac{3x^2 - 25x + 10}{4 - x}$  den maximalen Definitionsbereich sowie die größtmöglichen Intervalle, auf denen sie monoton ist.

**Aufgabe 6.3.** Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{x}}}$ .

- (a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge  $D$ , für die  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $f$  injektiv ist.
- (c) Für welchen Wertebereich  $W$  ist  $f: D \rightarrow W$  surjektiv?

**Aufgabe 6.4.** Welche der folgenden Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion? Geben Sie die Umkehrfunktion an, falls sie existiert.

(a)  $f(x): \mathbb{R} \rightarrow [3, \infty)$        $x \mapsto 2x^4 + 3$   
(b)  $g(x): [0, 3] \rightarrow [-4, -2]$        $x \mapsto x - \sqrt{x^2 + 16}$   
(c)  $h(x): (1, \infty) \rightarrow [1, 2]$        $x \mapsto \frac{2}{\ln(x) + 1}$

**Aufgabe 6.5.** Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$       (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n$

und zeigen Sie, dass die Reihe

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

konvergiert.

**Aufgabe 6.6.** Berechnen Sie – nur mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen – die Identitäten

- (a)  $\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$ ,
- (b)  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$ ,
- (c)  $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$ ,
- (d)  $1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$ .