

Mathematik I WS 2014/15
6. Übungsblatt
25.11.2014

Bei den Aufgaben auf diesem Blatt dürfen Sie keine Differentialrechnung verwenden!

Aufgabe 6.1. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche sind ungerade? (Nachweis!)

(a) $f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x)$ (b) $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$ (c) $h(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$

Aufgabe 6.2. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{3x^2 - 25x + 10}{4 - x}$ den maximalen Definitionsbereich sowie die größtmöglichen Intervalle, auf denen sie monoton ist.

Aufgabe 6.3. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{x}}}$.

- (a) Bestimmen Sie die größtmögliche Menge D , für die $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist.
- (b) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.
- (c) Für welchen Wertebereich W ist $f: D \rightarrow W$ surjektiv?

Aufgabe 6.4. Welche der folgenden Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion? Geben Sie die Umkehrfunktion an, falls sie existiert.

(a) $f(x): \mathbb{R} \rightarrow [3, \infty)$ $x \mapsto 2x^4 + 3$
(b) $g(x): [0, 3] \rightarrow [-4, -2]$ $x \mapsto x - \sqrt{x^2 + 16}$
(c) $h(x): (1, \infty) \rightarrow [1, 2]$ $x \mapsto \frac{2}{\ln(x) + 1}$

Aufgabe 6.5. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n$

und zeigen Sie, dass die Reihe

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

konvergiert.

Aufgabe 6.6. Berechnen Sie – nur mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen – die Identitäten

- (a) $\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y)$,
- (b) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$,
- (c) $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$,
- (d) $1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$.