Einführung in die komplexe Analysis
Wintersemester 2015/16

Blatt 0
9/10/2015

Aufgabe 0.1. Man beweise die folgenden Aussagen über offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{C}$.

(a) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen;

(b) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen;

(c) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen;

(d) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Finden sie unendlich viele offene Mengen mit nicht offenem Durchschnitt sowie unendlich viele abgeschlossene Mengen mit nicht abgeschlossener Vereinigung.

Aufgabe 0.2. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann stetig auf ganz $\mathbb{C}$, wenn für jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{C}$ das Urbild $f^{-1}(O)$ offen ist;

(b) Ist f stetig und $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, dann ist auch $f(K)$ kompakt.

Aufgabe 0.3. Seien $C, C_1, C_2 \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängende Mengen mit $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ und sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ überall stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $f(C)$ sowie $C_1 \cup C_2$ zusammenhängend sind. Gilt dies auch für Wegzusammenhang statt Zusammenhang?

Aufgabe 0.4. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Zeigen Sie:

(a) Jede abgeschlossene Teilmenge von K ist kompakt;

(b) Sind $A_i \subseteq K$, $i \in I$, abgeschlossen und gilt $\bigcap_{i\in J} A_i \neq \emptyset$ für jede endliche Indexmenge $J \subset I$, dann gilt auch $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

Problem 0.1. Prove the following statement on open and closed subsets of $\mathbb{C}$.

(a) The union of arbitrarily many open sets is open;

(b) the intersection of arbitrarily many closed sets is closed;

(c) the intersection of finitely many open sets is open;

(d) the union of finitely many closed sets is closed.

Find infinitely many open sets whose intersection is not open and find infinitely many closed sets whose union is not closed.

Problem 0.2. Given a function $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, prove that

(a) f is continuous on $\mathbb{C}$ if and only if the preimage $f^{-1}(O)$ is open for every open set $O \subseteq \mathbb{C}$;

(b) if f is continuous and $K \subseteq \mathbb{C}$ compact, then $f(K)$ is compact.

Problem 0.3. Let $C, C_1, C_2 \subseteq \mathbb{C}$ be connected sets with $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ and let $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be continuous. Prove that $f(C)$ and $C_1 \cup C_2$ are connected. Is it also true for path-connected instead of connected?

Problem 0.4. Given a compact set $K \subseteq \mathbb{C}$, show that

(a) every closed subset of K is compact;

(b) if $A_i \subseteq K$, $i \in I$, are closed and satisfy $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$ for every finite index set $J \subset I$, then $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.