Einführung in die komplexe Analysis
Wintersemester 2015/16

Blatt 1
Aufgaben zum Vorrechnen am 16/10/2015

Aufgabe 1.1. Zeigen Sie:

(a) Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend;

(b) Jede wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist auch zusammenhängend;

(c) Jede offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist auch wegzusammenhängend.

Aufgabe 1.2. (a) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0\}$ genau dann eine Kreislinie ist, wenn $\bar{\alpha} = \beta$ und $\alpha\beta > \gamma$ gelten.

(b) Wir betrachten die Mengen

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |2 + 5\,\mathrm{i} - z| < 4\} \qquad \text{und} \qquad \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z(2 - \mathrm{i})) = 1\}.$$

Sind diese Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt?

Aufgabe 1.3. Bestimmen Sie alle Stellen, an welchen die Funktionen

$$f_1(z) = \mathrm{Re}(z), \qquad f_2(z) = z \cdot \bar{z},$$
$$f_3(x + \mathrm{i}y) = xy + \mathrm{i}xy, \qquad f_4(x + \mathrm{i}y) = \sin^2(x + y) + \mathrm{i} \cdot \cos^2(x + y)$$

komplex differenzierbar sind.

Aufgabe 1.4. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph sowie $u(z), v(z)$ Real- beziehungsweise Imaginärteil von $f(z)$.

(a) Wann ist $u^2 + \mathrm{i}v^2$ holomorph?

(b) Zeigen Sie, dass f konstant ist, falls es nur reelle Werte annimmt.

(c) Sei $\hat{v}\colon G \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $\hat{f} = u + \mathrm{i}\hat{v}$ auf G holomorph ist. Zeigen Sie, dass $v - \hat{v}$ dann konstant ist.

Aufgabe 1.5. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph sowie $u(z), v(z)$ Real- beziehungsweise Imaginärteil von $f(z)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist, sobald eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(a) Es gibt eine differenzierbare Funktion $h\colon G \to \mathbb{R}$ mit $u = h \circ v$.

(b) Es gibt Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, nicht beide Null, so dass $\alpha u + \beta v$ konstant ist.

Problem 1.1. Prove that

(a) every real interval is connected;

(b) every path-connected subset of $\mathbb{C}$ is connected;

(c) every open connected subset of $\mathbb{C}$ is path-connected.

Problem 1.2. (a) Let $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Show that the set $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0\}$ is a circle if and only if $\bar{\alpha} = \beta$ and $\alpha\beta > \gamma$.

(b) Consider the sets

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |2 + 5\,\mathrm{i} - z| < 4\} \qquad \text{and} \qquad \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z(2 - \mathrm{i})) = 1\}.$$

Are these sets open, closed, bounded, compact?

Problem 1.3. Determine all $z \in \mathbb{C}$ where the functions

$$f_1(z) = \mathrm{Re}(z), \qquad f_2(z) = z \cdot \bar{z},$$
$$f_3(x + \mathrm{i}y) = xy + \mathrm{i}xy, \qquad f_4(x + \mathrm{i}y) = \sin^2(x + y) + \mathrm{i} \cdot \cos^2(x + y)$$

are complex differentiable.

Problem 1.4. Let $f\colon G \to \mathbb{C}$ be holomorphic on the open and connected set $G \subseteq \mathbb{C}$. Denote the real part and the imaginary part of $f(z)$ by $u(z)$ and $v(z)$, respectively.

(a) When is $u^2 + \mathrm{i}v^2$ holomorphic?

(b) Show that f is constant if it real-valued.

(c) Let $\hat{v}\colon G \to \mathbb{R}$ be a function for which $\hat{f} = u + \mathrm{i}\hat{v}$ is holomorphic on G. Prove that $v - \hat{v}$ is konstant.

Problem 1.5. Let $f\colon G \to \mathbb{C}$ be holomorphic on the open and connected set $G \subseteq \mathbb{C}$. Denote the real part and the imaginary part of $f(z)$ by $u(z)$ and $v(z)$, respectively. Prove that f is constant if one of the following holds.

(a) There is a differentiable real function $h\colon G \to \mathbb{R}$ with $u = h \circ v$.

(b) There are constants $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, not both zero, such that $\alpha u + \beta v$ is constant.