Einführung in die komplexe Analysis
Wintersemester 2015/16

Blatt 10
Aufgaben zum Vorrechnen am 18/12/2015

Aufgabe 10.1. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| > 1$ und setze $b_k := \alpha^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f, die in jedem Punkt b_k einen Pol erster Ordnung mit Residuum α^k besitzt und ansonsten keine Singularitäten hat.

Aufgabe 10.2. Wir betrachten die Funktionen

$$f(z) := \pi \cot(\pi z) = \pi \mathrm{i} \frac{e^{\pi \mathrm{i} z} + e^{-\pi \mathrm{i} z}}{e^{\pi \mathrm{i} z} - e^{-\pi \mathrm{i} z}} \qquad \text{und} \qquad g(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Zeigen Sie, dass f und g auf $\mathbb{C}$ meromorph sind mit Polen erster Ordnung mit Residuum 1 in den Punkten $k \in \mathbb{Z}$ und ansonsten keine Singularitäten besitzen. Zeigen Sie außerdem, dass $f(z+1) = f(z)$ und $g(z+1) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Aufgabe 10.3. Seien f, g die Funktionen aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f - g$ für $R > 1$ auf

$$S_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in [0,1] \wedge |\mathrm{Im}(z)| \geq R\}$$

beschränkt ist.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $f = g$ gilt.

Hinweis: Sie können den Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{t^2 + n^2} = \frac{\pi}{2}$$

verwenden.

Aufgabe 10.4. Beweisen Sie die Produktdarstellung

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Hinweis: Verwenden Sie die vorherigen beiden Aufgaben.

Problem 10.1. Let $\alpha \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| > 1$ and let $b_k := \alpha^k$ for every $k \in \mathbb{N}$. Construct a meromorphic function f on $\mathbb{C}$ that has a pole of order one with residue α^k in each point b_k and that has no other singularities.

Problem 10.2. Consider the functions

$$f(z) := \pi \cot(\pi z) = \pi \mathrm{i} \frac{e^{\pi \mathrm{i} z} + e^{-\pi \mathrm{i} z}}{e^{\pi \mathrm{i} z} - e^{-\pi \mathrm{i} z}} \qquad \text{and} \qquad g(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Show that f and g are meromorphic on $\mathbb{C}$ with poles of order one and residue 1 in each point $k \in \mathbb{Z}$ and have no other singularities.
Further prove that $f(z+1) = f(z)$ and $g(z+1) = g(z)$ for all $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Problem 10.3. Let f, g be the functions from the previous exercise.

(a) Show that $f - g$ is bounded on

$$S_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in [0,1] \wedge |\mathrm{Im}(z)| \geq R\},$$

where $R > 1$.

(b) Deduce from (a) that $f = g$.

Hint: you can use the equality

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{t^2 + n^2} = \frac{\pi}{2}$$

verwenden.

Problem 10.4. Prove that

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Hint: use the previous two exercises.