Einführung in die komplexe Analysis
Wintersemester 2015/16

Blatt 3
Aufgaben zum Vorrechnen am 30/10/2015

Aufgabe 3.1. (a) Es seien $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete und $f\colon G_1 \cup G_2$ stetig. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ gelte $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, sofern $\operatorname{Tr}\gamma$ in G_1 oder in G_2 enthalten ist. Zeigen Sie: Ist $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend, dann gilt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in $G_1 \cup G_2$. Gilt dies auch, wenn $G_1 \cap G_2$ *nicht* zusammenhängend ist?

(b) Zeigen Sie, dass

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$$

auf dem Gebiet

$$\mathbb{C} \setminus [0,1] := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in [0,1] \wedge \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 3.2. Seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ paarwise verschieden sowie $f\colon \mathbb{C}\setminus\{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir wählen nun $R, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$z_1, \dots, z_n \in B_R(0) \qquad \text{und} \qquad z_i \notin \overline{B_{r_j}(z_j)} \text{ für } i \neq j.$$

Definiere Integrationswege $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ durch

$$\gamma(t) := Re^{\mathrm{i}t} \qquad \text{und} \qquad \gamma_j(t) := z_j + r_j e^{\mathrm{i}t} \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

Beweisen Sie, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 3.3. Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$. Zeigen Sie durch Umformung in ein geeignetes Kurvenintegral, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha - \cos(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\,.$$

Aufgabe 3.4. Bestimmen Sie jeweils das Kurvenintegral der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - \mathrm{i}z^2 + z - \mathrm{i}}$$

entlang der Integrationswege $\gamma_1, \dots, \gamma_4\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$$\gamma_1(t) = -\mathrm{i} + \frac{3}{2}e^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_2(t) = -1 + 2e^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_3(t) = 1 + e^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_4(t) = 2\mathrm{i} + 2e^{\mathrm{i}t}.$$

Problem 3.1. (a) Let $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ be open and connected and let $f\colon G_1 \cup G_2$ be continuous. Suppose that $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ for every closed curve γ that is completely contained in G_1 or in G_2. Show that if $G_1 \cap G_2$ is connected then $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ for every closed curve γ in $G_1 \cup G_2$. Is this also true if $G_1 \cap G_2$ is *not* connected?

(b) Show that

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$$

has a primitive on the set

$$\mathbb{C} \setminus [0,1] := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in [0,1] \wedge \mathrm{Im}(z) = 0\}.$$

Problem 3.2. Let $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ be pairwise distinct and let $f\colon \mathbb{C}\setminus\{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ be holomorphic. Choose $R, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_{>0}$ so that

$$z_1, \dots, z_n \in B_R(0) \qquad \text{and} \qquad z_i \notin \overline{B_{r_j}(z_j)} \text{ for } i \neq j.$$

Define closed curves $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ as

$$\gamma(t) := Re^{\mathrm{i}t} \qquad \text{and} \qquad \gamma_j(t) := z_j + r_j e^{\mathrm{i}t} \text{ for } j = 1, \dots, n.$$

Prove that

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Problem 3.3. Let $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$. Show that

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha - \cos(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

by transforming the integral into a suitable curve integral.

Problem 3.4. Determine the value of each of the curve integrals of

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - \mathrm{i}z^2 + z - \mathrm{i}}$$

along the closed curves $\gamma_1, \dots, \gamma_4\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$$\gamma_1(t) = -\mathrm{i} + \frac{3}{2}e^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_2(t) = -1 + 2e^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_3(t) = 1 + e^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_4(t) = 2\mathrm{i} + 2e^{\mathrm{i}t}.$$