Einführung in die komplexe Analysis
Wintersemester 2015/16

Blatt 4
Aufgaben zum Vorrechnen am 6/11/2015

Aufgabe 4.1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die Kurvenintegrale der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^6 + 2z^5 - z^4 - 4z^3 - z^2 + 2z + 1}$$

entlang der Integrationswege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$$\gamma_1(t) = -1 + e^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_2(t) = 2 - 2e^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_3(t) = \mathrm{i} + 3e^{\mathrm{i}t}.$$

Aufgabe 4.2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3 z} \, \mathrm{d}z, \qquad \text{wobei } \gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = 2e^{\mathrm{i}t}.$$

Aufgabe 4.3. Sei f eine ganze Funktion (d.h. auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph). Aus der Vorlesung wissen wir, dass f analytisch ist, also um jeden Punkt z_0 in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R entwickelt werden kann. Zeigen Sie, dass sogar $R = \infty$ gilt.

Aufgabe 4.4. Sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die auf $\mathbb{R}$ reellwertig ist. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$$

gilt.

Aufgabe 4.5. Sei G ein Gebiet, $f \colon G \to \mathbb{C}$ und $f_n \in H(G)$ für $n \in \mathbb{N}$, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch f auf G holomorph ist und für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ der k-ten Ableitungen lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$ konvergiert.

Problem 4.1. Use Cauchy's integral formula to find the curve integrals of

$$f(z) = \frac{1}{z^6 + 2z^5 - z^4 - 4z^3 - z^2 + 2z + 1}$$

along $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ given by

$$\gamma_1(t) = -1 + e^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_2(t) = 2 - 2e^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_3(t) = \mathrm{i} + 3e^{\mathrm{i}t}.$$

Problem 4.2. Find the curve integral

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3 z}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{where } \gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = 2e^{\mathrm{i}t}.$$

Problem 4.3. Let f be an entire function (i.e. holomorphic on $\mathbb{C}$). We know from the lecture that f is analytic, i.e. around every point z_0 it can be expressed as a power series with positive radius of convergence. Show that $R = \infty$.

Problem 4.4. Let $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be an entire function that is real-valued on $\mathbb{R}$. Show that for all $z \in \mathbb{C}$

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

Problem 4.5. Let G be open and connected and let $f \colon G \to \mathbb{C}$. Suppose there is a sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of functions in $H(G)$ that converges locally uniformly to f. Prove that $f \in H(G)$ and that for every $k \in \mathbb{N}$ the sequence $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ of the k-th derivatives converges locally uniformly to $f^{(k)}$.