Einführung in die komplexe Analysis
Wintersemester 2015/16

Blatt 5
Aufgaben zum Vorrechnen am 13/11/2015

Aufgabe 5.1. Sei f eine ganze Funktion mit

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ermitteln Sie $f^{(n)}(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 5.2. Sei $f \in H(B_3(0))$. Zeigen Sie, dass jede der folgenden Aussagen nicht für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ zutreffen kann.

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ ungerade;} \end{cases}$

(b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ ungerade;} \end{cases}$

(c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}$.

Aufgabe 5.3. Sei $R > 0$, $a \in \mathbb{C}$ und $f \in H(B_R(a))$ nicht konstant. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g\colon [0, R] \to \mathbb{R}, \qquad g(r) = \max_{z \in \partial B_r(a)} \operatorname{Re}(z)$$

stetig und streng monoton steigend ist.

Aufgabe 5.4. Sei $r > 0$ und $f, g \in H(B_r(0))$, so dass $|f(z)| = |g(z)|$ für alle $z \in \partial B_1(0)$ gilt. Man zeige, dass mindestens eine der folgenden Aussagen wahr ist.

(i) Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $f = \alpha g$;

(ii) f besitzt in $B_1(0)$ eine Nullstelle;

(iii) g besitzt in $B_1(0)$ eine Nullstelle.

Aufgabe 5.5. Sei $f\colon B_1(0) \to B_1(0)$ holomorph sowie $a, b \in B_1(0)$ verschiedene Punkte mit $f(a) = a$ und $f(b) = b$. Zeigen Sie, dass dann $f(z) = z$ für alle $z \in B_1(0)$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

eine holomorphe Bijektion $B_1(0) \to B_1(0)$ ist.

Problem 5.1. Let f be an entire function with

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)$$

for all $n \in \mathbb{N}_0$. Determine $f^{(n)}(1)$ for all $n \in \mathbb{N}_0$.

Problem 5.2. Let $f \in H(B_3(0))$. Show that none of the following claims can be true for all but finitely many $n \in \mathbb{N}$.

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ even,} \\ \frac{1}{n} & \text{for } n \text{ odd;} \end{cases}$

(b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{for } n \text{ even,} \\ \frac{1}{n} & \text{for } n \text{ odd;} \end{cases}$

(c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}$.

Problem 5.3. Let $R > 0$, $a \in \mathbb{C}$, and $f \in H(B_R(a))$ non-constant. Show that the function

$$g\colon [0, R] \to \mathbb{R}, \qquad g(r) = \max_{z \in \partial B_r(a)} \operatorname{Re}(z)$$

is continuous and stricly increasing.

Problem 5.4. Let $r > 0$ and $f, g \in H(B_r(0))$ such that $|f(z)| = |g(z)|$ for all $z \in \partial B_1(0)$. Show that at least one of the following holds.

(i) There is an $\alpha \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| = 1$ and $f = \alpha g$;

(ii) f has a zero in $B_1(0)$;

(iii) g has a zero in $B_1(0)$.

Problem 5.5. Let $f\colon B_1(0) \to B_1(0)$ be holomorphic and let $a, b \in B_1(0)$ be distinct points with $f(a) = a$ and $f(b) = b$. Show that $f(z) = z$ holds for all $z \in B_1(0)$.
Hint: show first that the function

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

is a holomorphic bijection $B_1(0) \to B_1(0)$.