Einführung in die komplexe Analysis
Wintersemester 2015/16

Blatt 6
Aufgaben zum Vorrechnen am 20/11/2015

Aufgabe 6.1. Sei f eine nicht-konstante ganze Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass $|f|$ alle positiven reellen Werte annimmt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ jeweils alle reellen Werte annehmen.

Aufgabe 6.2. Sei G ein Gebiet. Beweisen Sie, dass die Nullfunktion die einzige Funktion in $H(G)$ mit überabzählbar vielen Nullstellen in G ist.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst den Fall $G = \mathbb{C}$ und passen Sie danach die Beweisidee für andere Gebiete an.

Aufgabe 6.3. Verwenden Sie das in der Vorlesung bewiesene Maximumsprinzip (Satz V.3.2), um die folgende allgemeinere Variante zu beweisen.

> Sei G ein beschränktes Gebiet und sei $f \in H(G)$ auf dem Abschluss $\bar{G}$ von G stetig. Falls f nicht konstant ist, dann gilt
>
> $$|f(z)| < \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$$
>
> für alle $z \in G$.

Formulieren und beweisen Sie auch das dazugehörige verallgemeinerte Minimumsprinzip.

Aufgabe 6.4. Sei f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$.

(a) Sei $c > 0$. Man zeige, dass jede Zusammenhangskomponente von

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| < c\}$$

eine Nullstelle von f enthält.

(b) Für jedes $c > 0$ bezeichnen wir mit $g(c)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| = c\}.$$

Beweisen Sie, dass hierdurch eine Funktion $g\colon (0, \infty) \to \{1, \ldots, n\}$ definiert wird, die überdies surjektiv und monoton fallend ist.

Problem 6.1. Let f be a non-constant entire function.

(a) Show that $|f|$ takes all positive real values.

(b) Show that both $\mathrm{Re}(f)$ and $\mathrm{Im}(f)$ take all real values.

Problem 6.2. Let $G \subseteq \mathbb{C}$ be open and connected. Prove that every function in $H(G)$ with uncountably many zeros is identically zero.
Hint: prove the case $G = \mathbb{C}$ first and adjust the proof idea for general G.

Problem 6.3. Use the maximum modulus principle from the lecture (Theorem V.3.2) to prove the following more general version.

> Let $G \subset \mathbb{C}$ open, connected, and bounded and suppose that $f \in H(G)$ is continuous on the closure $\bar{G}$ of G. Then, unless f is constant,
>
> $$|f(z)| < \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$$
>
> for all $z \in G$.

Also state and prove the corresponding minimum modulus principle.

Problem 6.4. Let f be a polynomial of degree $n \geq 1$.

(a) Let $c > 0$. Show that each connected component of

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| < c\}$$

contains a root of f.

(b) For every $c > 0$ we denote by $g(c)$ the number of connected components of

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| = c\}.$$

Prove that this defines a function $g\colon (0, \infty) \to \{1, \ldots, n\}$ that is surjective and decreasing.