Einführung in die komplexe Analysis

Wintersemester 2015/16

Blatt 7

Aufgaben zum Vorrechnen am 27/11/2015

Aufgabe 7.1. Gegeben seien ein geschlossener Integrationsweg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ und ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(\gamma)$. Wir definieren die Funktion $\alpha\colon [0,1] \to \partial B_1(z_0)$ durch

$$\alpha(t) := z_0 + \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|}.$$

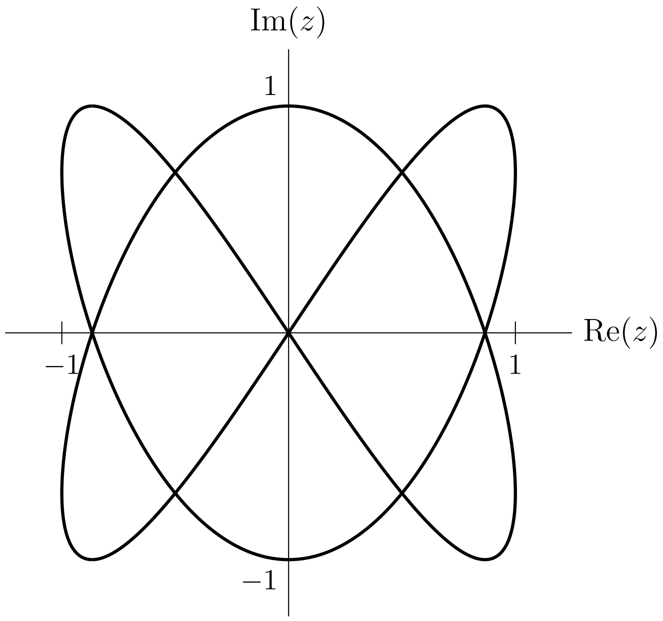
(a) Man zeige, dass α ein geschlossener Integrationsweg ist und $\mathrm{Ind}_\alpha(z_0) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ erfüllt.

(b) Beweisen Sie, dass es eine stetige Funktion $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt mit $\alpha(t) = z_0 + e^{\mathrm{i}\varphi(t)}$ für alle $t \in [0,1]$. Drücken Sie $\mathrm{Ind}_\alpha(z_0)$ durch φ aus.

Aufgabe 7.2. Bestimmen Sie das Kurvenintegral der Funktion

$$f(z) = \frac{-5 + 4\,\mathrm{i}}{z - \frac{3}{4}(1+\mathrm{i})} + \frac{4 - \mathrm{i}}{z^2 - \frac{1+\mathrm{i}}{2}z + \frac{\mathrm{i}}{4}}$$

entlang der Kurven γ_5 und γ_6 für $\gamma_k\colon [0, k\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \sin(2t) + \mathrm{i} \cdot \sin(3t)$. Die Spur dieser Kurven ist unten abgebildet.



Aufgabe 7.3. Sei G ein Gebiet. Mit $\mathcal{Z}(G)$ bezeichnen wir die Menge aller Zyklen in G. Man zeige, dass durch

$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \;:\Longleftrightarrow\; \Gamma_1 - \Gamma_2 \text{ nullhomolog in } G$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{Z}(G)$ definiert wird und dass die Menge $\mathcal{Z}(G)/\sim$ der Äquivalenzklassen mit der Verknüpfung $[\Gamma_1] + [\Gamma_2] := [\Gamma_1 + \Gamma_2]$ (ist dies wohldefiniert?) eine Gruppe ist. Welche Gruppen erhalten wir in den Fällen $G = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $G = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ und $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$?

Aufgabe 7.4. Es sei G ein Gebiet und Γ ein Zykel in G.

(a) Konstruieren Sie für den Fall, dass Γ nicht nullhomolog ist, eine Funktion $f \in H(G)$ mit $\oint_\Gamma f(w)\,\mathrm{d}w \neq 0$. Folgern Sie daraus, dass Γ nullhomolog sein muss, falls G ein Sterngebiet ist.

(b) Sei $f \in H(G)$ und Γ nullhomolog. Beweisen Sie aus der globalen Cauchyschen Integralformel die folgende allgemeinere Aussage für $k \in \mathbb{N}$ und $z \in G \setminus \mathrm{Sp}(\Gamma)$.

$$f^{(k)}(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{k!}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}w.$$

Problem 7.1. Let $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ be a closed curve and let $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(\gamma)$. We define the function $\alpha\colon [0,1] \to \partial B_1(z_0)$ by

$$\alpha(t) := z_0 + \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|}.$$

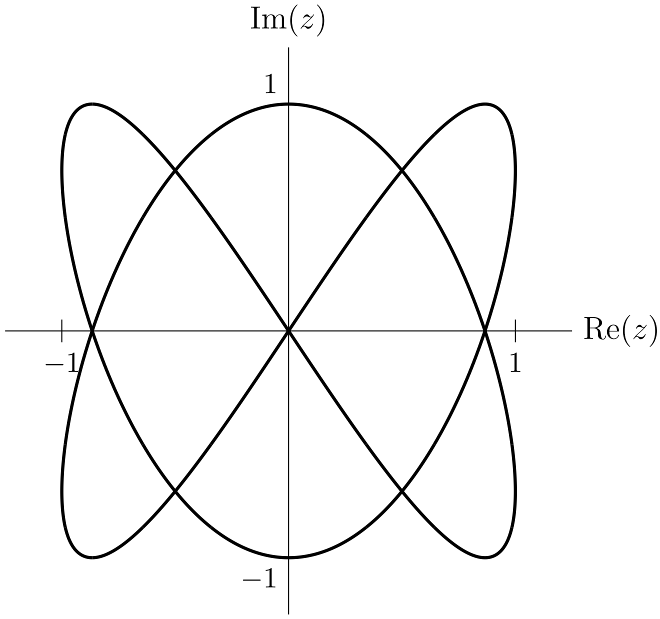
(a) Prove that α is a closed curve that satisfies $\mathrm{Ind}_\alpha(z_0) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$.

(b) Show that there exists a continuous function $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ with $\alpha(t) = z_0 + e^{\mathrm{i}\varphi(t)}$ for all $t \in [0,1]$. Express $\mathrm{Ind}_\alpha(z_0)$ in terms of φ.

Problem 7.2. Determine the value of the curve integrals of

$$f(z) = \frac{-5 + 4\,\mathrm{i}}{z - \frac{3}{4}(1 + \mathrm{i})} + \frac{4 - \mathrm{i}}{z^2 - \frac{1+\mathrm{i}}{2} z + \frac{\mathrm{i}}{4}}$$

along the curves γ_5 and γ_6, where $\gamma_k\colon [0, k\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \sin(2t) + \mathrm{i} \cdot \sin(3t)$. The trace of these curve is drawn below.



Problem 7.3. Let G be open and connected. By $\mathcal{Z}(G)$ we denote the set of all cycles in G. Prove that

$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \;:\Longleftrightarrow\; \Gamma_1 - \Gamma_2 \text{ nullhomolog in } G$$

is an equivalence relation on $\mathcal{Z}(G)$ and that the set $\mathcal{Z}(G)/\sim$ of equivalence classes together with the operation $[\Gamma_1] + [\Gamma_2] := [\Gamma_1 + \Gamma_2]$ (is this well defined?) is a group. Which groups do we obtain if $G = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $G = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, or $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$?

Problem 7.4. Let G be open and connected and let Γ be a cycle in G.

(a) Assuming that Γ is not null homologous, construct a function $f \in H(G)$ with $\oint_\Gamma f(w)\,\mathrm{d}w \neq 0$. Deduce that Γ is null homologous whenever G is star-shaped.

(b) Let $f \in H(G)$ and suppose that Γ is null homologous. Use the global Cauchy integral formula to derive the following more general statement for every $k \in \mathbb{N}$ and $z \in G \setminus \mathrm{Sp}(\Gamma)$.

$$f^{(k)}(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{k!}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}w.$$