Einführung in die komplexe Analysis
Wintersemester 2015/16

Blatt 8

Aufgaben zum Vorrechnen am 4/12/2015

Aufgabe 8.1. Sei G ein Gebiet, $f, g \in H(G)$ und $z_0 \in G$ eine gemeinsame Nullstelle von f und g mit Vielfachheit n_f beziehungsweise n_g. Zeigen Sie, dass $h := f/g$ in z_0

(i) eine hebbare Singularität besitzt, falls $n_f \geq n_g$;

(ii) einen Pol der Ordnung $n_g - n_f$ besitzt, falls $n_g > n_f$.

Zeigen Sie außerdem, dass im Fall $n_f \geq n_g$ gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n_g)}(z_0)}{g^{(n_g)}(z_0)} .$$

Aufgabe 8.2. Sei G ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f \in H(G \setminus \{z_0\})$. Beweisen Sie, dass f in z_0 genau dann

(a) eine hebbare Singularität besitzt, falls für jede Folge $(z_n) \to z_0$ in G die Folge $\big(f(z_n)\big)$ konvergiert;

(b) einen Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ besitzt, falls für jede Folge $(z_n) \to z_0$ in G die Folge $\big((z_n - z_0)^k f(z_n)\big)$ gegen einen Wert ungleich Null konvergiert;

(c) eine wesentliche Singularität besitzt, falls eine Folge $(z_n) \to z_0$ in G existiert, so dass die Folge $\big(f(z_n)\big)$ beschränkt aber nicht konvergent ist.

Hinweis: Aussagen, die in der Vorlesung lediglich als Bemerkung vorkamen, müssen an dieser Stelle bewiesen werden.

Aufgabe 8.3. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und reelle Zahlen $0 < r < R$ bezeichne

$$K(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

den Kreisring um z_0 mit Radien r und R. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{(3 - 4\,\mathrm{i})z}{z^2 - (3 + 4\,\mathrm{i})z + 12\,\mathrm{i}} .$$

(a) Bestimmen Sie die Laurent-Reihen von f bezüglich der Kreisringe $K(0; 1, 2)$, $K(3; 2, 4)$ und $K(3; 6, 12)$.

(b) Für welche Werte von r und R ist f auf $K(3; r, R)$ holomorph? Zeigen Sie, dass die Laurent-Reihe von f bezüglich $K(3; r, R)$ stets mit der bezüglich $K(3; 2, 4)$ oder mit der bezüglich $K(3; 6, 12)$ übereinstimmt. Aus welcher der beiden Reihen können wir das Residuum $\mathrm{Res}_3(f)$ ablesen?

Aufgabe 8.4. Berechnen Sie für die Integrationswege

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = 1 + 2e^{\mathrm{i}t}, \quad \gamma_2(t) = \mathrm{i} + \frac{5}{2}e^{\mathrm{i}t}, \quad \gamma_3(t) = \frac{\mathrm{i}}{3} + e^{\mathrm{i}t}$$

mit Hilfe des Residuensatzes das Kurvenintegral

$$\oint_{2\gamma_1 - 5\gamma_2 + 3\gamma_3} \frac{3}{\sin(\pi\,\mathrm{i}z)}\,\mathrm{d}z.$$

Problem 8.1. Let G be a region (i.e. open and connected), $f, g \in H(G)$ and let $z_0 \in G$ be a common zero of f and g with multiplicities n_f and n_g, respectively. Show that in z_0, the function $h := f/g$ has

(i) removable singularity if $n_f \geq n_g$;

(ii) a pole of order $n_g - n_f$ if $n_g > n_f$.

Also show that if $n_f \geq n_g$ we have

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n_g)}(z_0)}{g^{(n_g)}(z_0)} \,.$$

Problem 8.2. Let G be a region, $z_0 \in G$, and $f \in H(G \setminus \{z_0\})$. Prove that f

(a) has a removable singularity in z_0 if and only if for every sequence $(z_n) \to z_0$ in G the sequence $\big(f(z_n)\big)$ converges;

(b) has a pole of order $k \in \mathbb{N}$ in z_0 if and only if for every sequence $(z_n) \to z_0$ in G the sequence $\big((z_n - z_0)^k f(z_n)\big)$ converges to a non-zero value;

(c) has an essential singularity in z_0 if and only if there exists a sequence $(z_n) \to z_0$ in G such that the sequence $\big(f(z_n)\big)$ is bounded but not convergent.

Note: claims that were stated in the lecture as remarks need to be proved before applying them here.

Problem 8.3. For $z_0 \in \mathbb{C}$ and real numbers $0 < r < R$ denote by

$$K(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

the annulus with centre z_0 and radii r and R. Consider the function

$$f(z) = \frac{(3 - 4\,\mathrm{i})z}{z^2 - (3 + 4\,\mathrm{i})z + 12\,\mathrm{i}} \,.$$

(a) Determine the Laurent series of f with respect to the annuli $K(0; 1, 2)$, $K(3; 2, 4)$, and $K(3; 6, 12)$.

(b) For which values of r and R is f holomorphic on $K(3; r, R)$? Show that the Laurent series of f with respect to $K(3; r, R)$ is identical either to the one with respect to $K(3; 2, 4)$ or to the one with respect to $K(3; 6, 12)$. From which of the two series can we tell the residue $\mathrm{Res}_3(f)$?

Problem 8.4. Given the curves

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = 1 + 2e^{\mathrm{i}t}, \quad \gamma_2(t) = \mathrm{i} + \frac{5}{2}e^{\mathrm{i}t}, \quad \gamma_3(t) = \frac{\mathrm{i}}{3} + e^{\mathrm{i}t},$$

use the residue formula to determine the curve integral

$$\oint_{2\gamma_1 - 5\gamma_2 + 3\gamma_3} \frac{3}{\sin(\pi\,\mathrm{i}z)}\,\mathrm{d}z.$$