Einführung in die komplexe Analysis

Wintersemester 2015/16

Blatt 9

Aufgaben zum Vorrechnen am 11/12/2015

Aufgabe 9.1. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die reellen Integrale

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^2} \, \mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{x^4+x^2+1} \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 9.2. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die reellen Integrale

$$\text{(a)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-2\sin(x))^2} \, \mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 9.3. Gesucht ist das reelle Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} \, \mathrm{d}x.$$

Wählen Sie geeignete Zykel Γ_R und verwenden Sie den Residuensatz, um das Integral $\oint_{\Gamma_R} \frac{1}{z^3+1} \, \mathrm{d}z$ zu berechnen. Ermitteln Sie anschließend den Wert des gesuchten reellen Integrals mit Hilfe des Grenzwertes

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{1}{z^3+1} \, \mathrm{d}z.$$

Aufgabe 9.4. Gegeben seien die Funktionen

$$f(z) = 7z^6 + 9z^5 + 1 \qquad \text{und} \qquad g(z) = e^{-z} + z.$$

(a) Wie viele Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) besitzt f in den Kreisscheiben $B_1(0)$, $B_{1/2}(0)$ und $B_{1/2}(2)$?

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$. Zeigen Sie, dass es genau ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil gibt, für welches $g(z_0) = \alpha$ gilt. Zeigen Sie außerdem, dass z_0 reell ist.

Problem 9.1. Let $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Use the residue theorem to determine the values of the following real integrals.

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\, \mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{x^4+x^2+1}\, \mathrm{d}x.$$

Problem 9.2. Use the residue theorem to determine the values of the following real integrals.

$$\text{(a)} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{(1-2\sin(x))^2}\, \mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, \mathrm{d}x.$$

Problem 9.3. In order to determine the value of the real integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1}\, \mathrm{d}x,$$

choose suitable cycles Γ_R and solve the integral $\oint_{\Gamma_R} \frac{1}{z^3+1}\, \mathrm{d}z$ using the residue theorem. Then determine the value of the real integral using the limit value

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{1}{z^3+1}\, \mathrm{d}z.$$

Problem 9.4. Let functions

$$f(z) = 7z^6 + 9z^5 + 1 \qquad \text{and} \qquad g(z) = e^{-z} + z$$

be given.

(a) How many roots (counted including multiplicities) does f have in the discs $B_1(0)$, $B_{1/2}(0)$, and $B_{1/2}(2)$?

(b) Let $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$. Show that there is a unique $z_0 \in \mathbb{C}$ with positive real part such that $g(z_0) = \alpha$ holds. Additionally show that z_0 is a real number.