

## Allgemeine Integrationsbereiche

Es sei  $f(x, y)$  eine Funktion in zwei Variablen. Wir wollen das Doppelintegral

$$\iint_B f(x, y) dx dy$$

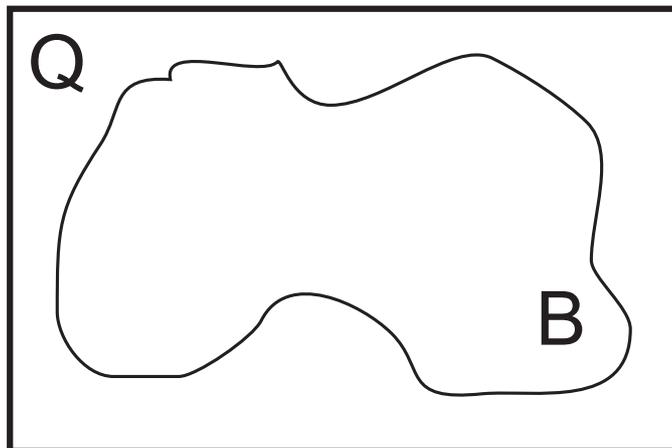
auf einem Bereich  $B$  erklären, der nicht mehr notwendigerweise ein Rechteck ist. Dazu führen wir die Funktion

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in B, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein und erhalten

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_Q f^*(x, y) dx dy,$$

wobei  $Q$  ein beliebiges Rechteck sein kann, das  $B$  enthält. Genauso kann man auch für Dreifachintegrale vorgehen.



Insbesondere gilt:

- $\iint_B 1 \, dx \, dy$  ist der Flächeninhalt des ebenen Bereichs  $B$ .
- $\iiint_B 1 \, dx \, dy \, dz$  ist das Volumen des räumlichen Bereichs  $B$ .

Man verwendet auch die Notationen  $dF = dx \, dy$  und  $dV = dx \, dy \, dz$  (Flächenelement bzw. Volumenelement).

**Satz.** Die Integrale

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{bzw.} \quad \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

existieren, falls  $f$  stückweise stetig ist und der Rand von  $B$  stückweise glatt (stetig differenzierbar) ist.