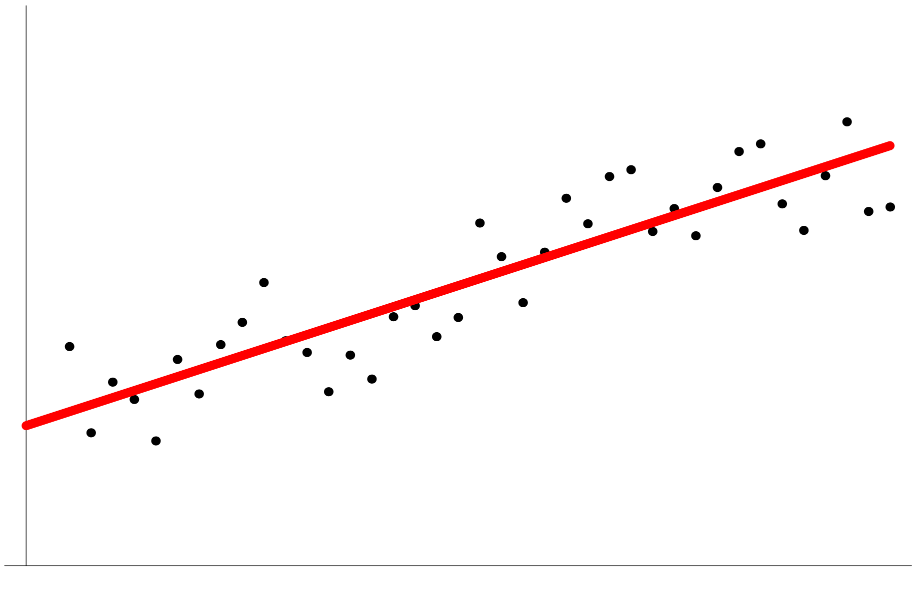
Ausgleichsgeraden

Gegeben sei eine Menge von Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), die in etwa ein lineares Gesetz widerspiegelt. Wir suchen jene Gerade $y = ax + b$, die die Punkte bestmöglich annähert. Dazu bedienen wir uns der **Methode der kleinsten Fehlerquadrate**: der “Fehler” (Abweichung von der Geraden) im Punkt (x_k, y_k) ist $y_k - (ax_k + b)$. Wir minimieren die Summe der quadrierten Fehler:

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - (ax_k + b))^2 \ldots \mathrm{min!}$$



Die partiellen Ableitungen nach a und b sind

$$\sum_{k=1}^{n} -2x_k(y_k-(ax_k+b)) = 2a\sum_{k=1}^{n} x_k^2+2b\sum_{k=1}^{n} x_k-2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} -2(y_k-(ax_k+b)) = 2a\sum_{k=1}^{n} x_k+2b\sum_{k=1}^{n} 1-2\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

Beide Ableitungen müssen verschwinden; wir erhalten also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) b &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) a + \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) b &= \sum_{k=1}^{n} y_k. \end{aligned}$$

Dieses System kann man mit Hilfe der Cramerschen Regel auflösen: mit

$$D = n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k & \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_k & n \end{vmatrix}, \\ b &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 & \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k & \sum_{k=1}^{n} y_k \end{vmatrix}. \end{aligned}$$