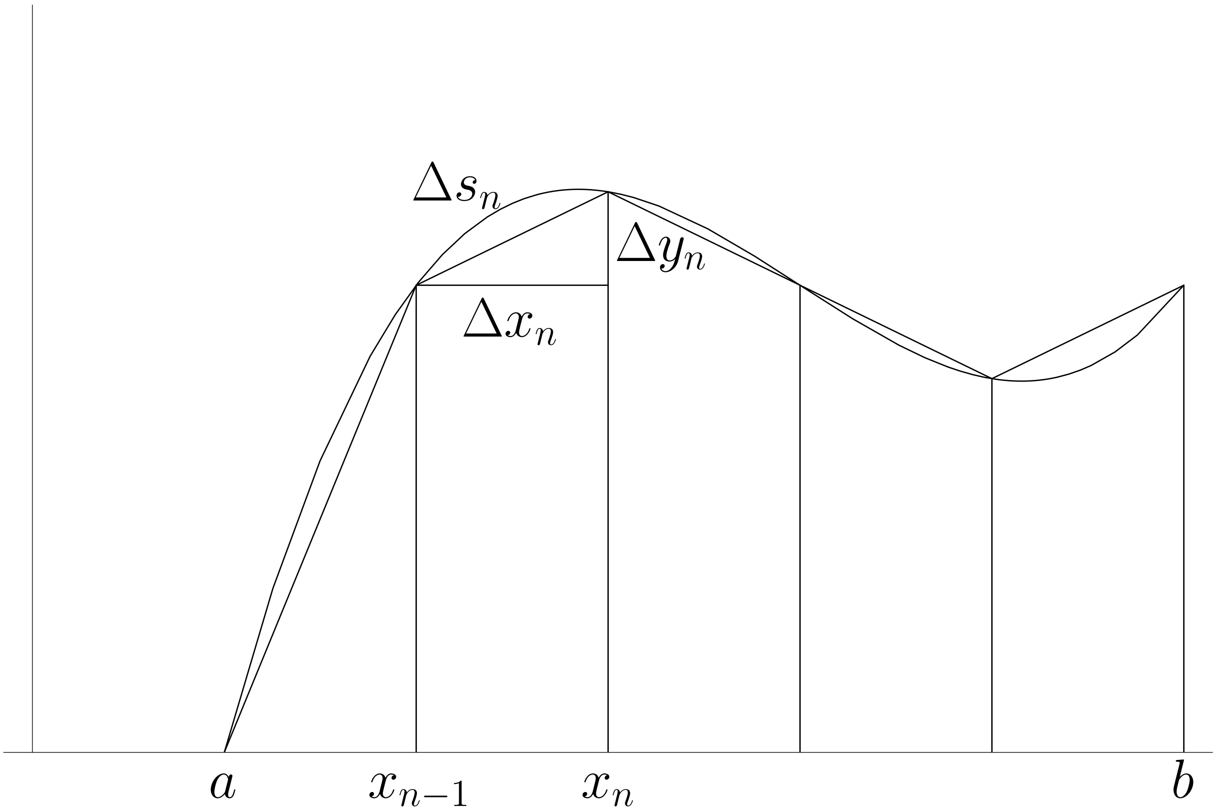
Die Bogenlänge einer Kurve



Gegeben sei eine Kurve in expliziter Form $y = y(x)$. Wir approximieren die Bogenlänge durch einen Polygonzug:

$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}, \qquad \Delta y_n = y_n - y_{n-1} = y(x_n) - y(x_{n-1})$

sowie

$$\Delta s_n^2 \approx \Delta x_n^2 + \Delta y_n^2.$$

Es folgt

$$\Delta s_n \approx \sqrt{\Delta x_n^2 + \Delta y_n^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)^2} \cdot \Delta x_n$$

und damit für die gesamte Bogenlänge

$$s \approx \sum_{n=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)^2} \cdot \Delta x_n.$$

Nach dem Mittelwertsatz ist $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = y'(\xi_n)$ für eine Zwischenstelle $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Die Bogenlänge wird also durch die Riemannsche Summe

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt{1 + y'(\xi_n)^2}\, \Delta x_n$$

approximiert. Im Grenzwert erhalten wir das Integral

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

In Parameterdarstellung: Sind $x = x(t)$ und $y = y(t)$ Funktionen eines Parameters t, dann gilt

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

und $dx = \dot{x}\, dt$, und es folgt für die Bogenlänge

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} \cdot \dot{x}\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \end{aligned}$$

In Polarkoordinatendarstellung: Die Polarkoordinatendarstellung $r = r(\varphi)$ kann in eine Parameterdarstellung

$$x = r(\varphi) \cos\varphi, \qquad y = r(\varphi) \sin\varphi$$

übergeführt werden. Es folgt

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{dx}{d\varphi} = \dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\
\dot{y} &= \frac{dy}{d\varphi} = \dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi.
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{r}^2\cos^2\varphi - 2r\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi \\
&\quad + \dot{r}^2\sin^2\varphi + 2r\dot{r}\cos\varphi\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi \\
&= (\dot{r}^2 + r^2)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\
&= \dot{r}^2 + r^2.
\end{aligned}$$

Daher ist die Bogenlänge

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2}\, d\varphi.$$