

Gegeben sei eine quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Wir wollen nun eine Transformation

$$\vec{x}' = (T^T)^{-1} \cdot \vec{x}$$

mit einer orthogonalen Matrix T (Drehung!) anwenden, sodass kein gemischtes Glied x_1x_2 mehr auftritt: es gilt

$$\vec{x} = T^T \cdot \vec{x}'$$

und damit

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= (T^T \cdot \vec{x}')^T \cdot A \cdot (T^T \cdot \vec{x}') \\ &= \vec{x}'^T \cdot (T \cdot A \cdot T^T) \cdot \vec{x}' = Q(x'_1, x'_2). \end{aligned}$$

$D = T \cdot A \cdot T^T$ soll also eine Diagonalmatrix sein:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Es sei

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$A \cdot T^T = T^{-1} \cdot D = T^T \cdot D,$$

also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten zwei Gleichungssysteme:

$$a_{11}t_{11} + a_{12}t_{12} = \lambda_1 t_{11},$$

$$a_{21}t_{11} + a_{22}t_{12} = \lambda_1 t_{12},$$

und

$$a_{11}t_{21} + a_{12}t_{22} = \lambda_2 t_{21},$$

$$a_{21}t_{21} + a_{22}t_{22} = \lambda_2 t_{22}.$$

Setzen wir

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} t_{21} \\ t_{22} \end{pmatrix},$$

dann lassen sich die Gleichungen als

$$A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot I \cdot \vec{v}_i$$

oder

$$(A - \lambda_i \cdot I) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$$

schreiben ($i = 1, 2$). Dieses Gleichungssystem hat nur dann eine nichttriviale Lösung ($\vec{v} \neq \vec{0}$), wenn

$$\det(A - \lambda_i \cdot I) = 0.$$

Die Werte λ_1 und λ_2 , für die dies gilt, heißen **Eigenwerte** von A , die Lösungen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ heißen **Eigenvektoren**. Das Polynom

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$$

wird **charakteristisches Polynom** von A genannt.