Das begleitende Dreibein

Die Bogenlänge einer dreidimensionalen Kurve ist durch das Integral

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} |\dot{\vec{x}}|\, d\tau$$

gegeben; es gilt somit

$$\dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{x}}|.$$

Tangentenvektor: Der Tangentenvektor ist die Ableitung von $\vec{x}$ nach dem natürlichen Parameter s; er ist immer normiert:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|},$$

folglich $|\vec{t}| = 1$.

Hauptnormalvektor: Der Hauptnormalvektor ist die normierte Ableitung von $\vec{t}$ nach dem natürlichen Parameter s; er steht normal auf $\vec{t}$: wegen $|\vec{t}| = |\vec{x}'| = 1$ gilt

$$\vec{t} \cdot \vec{t} = |\vec{t}|^2 = 1.$$

Leitet man nach s ab, folgt aus der Produktregel

$$\vec{t}' \cdot \vec{t} + \vec{t} \cdot \vec{t}' = 2\vec{t}' \cdot \vec{t} = 0,$$

d.h. $\vec{t}' = \vec{x}''$ und $\vec{t} = \vec{x}'$ stehen aufeinander normal.

Durch Normieren von $\vec{t}'$ erhalten wir den Hauptnormalvektor $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \frac{\vec{t}'}{|\vec{t}'|}.$$

Binormalvektor: Der Binormalvektor $\vec{b}$ ergänzt $\vec{t}$ und $\vec{n}$ zu einem Tripel paarweise orthogonaler Vektoren, dem sogenannten **begleitenden Dreibein**. Er ist das Kreuzprodukt der beiden:

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}.$$

In Parameterdarstellung erhält man das begleitende Dreibein aus den folgenden Formeln:

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|},$$

sowie

$$\begin{aligned}
\vec{t}' &= \frac{d}{ds}\vec{t} = \frac{d}{ds}\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}\right) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\dot{\vec{x}}}{\left(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}\right)^{1/2}}\right) \cdot \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|} \\
&= \left(\frac{\ddot{\vec{x}}}{\left(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}\right)^{1/2}} - \frac{2\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}}{2\left(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}\right)^{3/2}} \cdot \dot{\vec{x}}\right) \cdot \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|} \\
&= \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|^2} \cdot \left(\ddot{\vec{x}} - \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^2} \cdot \dot{\vec{x}}\right).
\end{aligned}$$

Den Hauptnormalvektor $\vec{n}$ erhält man nun durch Normieren, den Binormalvektor durch Bilden des Kreuzprodukts $\vec{t} \times \vec{n}$. Alternativ kann man den folgenden Zugang wählen:

Die **Krümmung** ist als die Änderung der Richtung (d.h. des Tangentenvektors) mit der Bogenlänge definiert: $\kappa = |\vec{t}\,'| = |\vec{x}''|$. Es gilt also

$$\vec{n} = \frac{\vec{t}\,'}{|\vec{t}\,'|} = \frac{\vec{t}\,'}{\kappa}$$

oder

$$\vec{t}\,' = \kappa\vec{n}.$$

Die Krümmung ist aufgrund der Definition im Gegensatz zu zweidimensionalen Kurven immer positiv!

Nun betrachte die beiden Ableitungen

$$\dot{\vec{x}} = |\dot{\vec{x}}| \cdot \vec{t} = \dot{s} \cdot \vec{t}$$

und

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{s} \cdot \vec{t} + \dot{s} \cdot \frac{d\vec{t}}{dt} = \ddot{s} \cdot \vec{t} + \dot{s} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \cdot \vec{t} + \dot{s}^2 \cdot \vec{t}\,'.$$

Das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren ist

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} &= (\dot{s} \cdot \vec{t}) \times (\ddot{s} \cdot \vec{t} + \dot{s}^2 \cdot \vec{t}\,') = \dot{s}\ddot{s}(\vec{t} \times \vec{t}) + \dot{s}^3(\vec{t} \times \vec{t}\,') \\ &= \vec{0} + \dot{s}^3(\vec{t} \times (\kappa\vec{n})) = \dot{s}^3\kappa\vec{b}.\end{aligned}$$

Da $\dot{s}^3\kappa$ eine positive Konstante ist, kann man den Binormalvektor nun durch Normieren bestimmen:

$$\vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}.$$

Der Hauptnormalvektor ergibt sich dann als Kreuzprodukt

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}.$$

Schließlich erhält man noch eine Formel für die Krümmung:

$$|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}| = \dot{s}^3 \kappa |\vec{b}| = \dot{s}^3 \kappa,$$

da $\vec{b}$ normiert ist, und damit

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{\dot{s}^3} = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}.$$

Zusammenfassung:

- $$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \qquad \vec{n} = \frac{\vec{t}\,'}{|\vec{t}\,'|} = \frac{\vec{x}''}{|\vec{x}''|}, \qquad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n},$$
- $$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \qquad \vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}, \qquad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t},$$
- $$\kappa = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}.$$