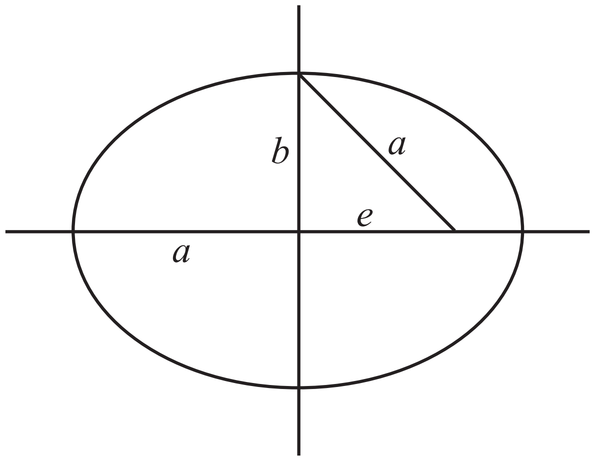
Polarkoordinatendarstellung einer Ellipse

Gegeben sei eine Ellipse in erster Hauptlage:

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} = 1.$$

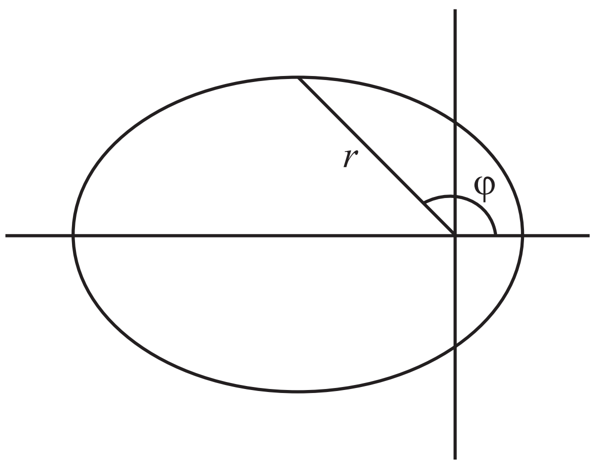


Diese Ellipse hat Brennpunkte $(\pm e, 0)$, wobei $e^2 = a^2 - b^2$. Durch die Verschiebung $x = \hat{x} - e$ ($\hat{y} = y$ bleibt gleich) wird der Brennpunkt $(e, 0)$ in den Ursprung verschoben. Wir erhalten

$$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Zur Darstellung in Polarkoordinaten setzen wir $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$:

$$\frac{(r\cos\varphi + e)^2}{a^2} + \frac{(r\sin\varphi)^2}{b^2} = 1.$$



Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned}
&b^2(r\cos\varphi + e)^2 + a^2(r\sin\varphi)^2 = a^2b^2,\\
&b^2r^2\cos^2\varphi + 2eb^2r\cos\varphi + b^2e^2 + a^2r^2\sin^2\varphi = a^2b^2,\\
&r^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + 2eb^2r\cos\varphi + b^2(e^2 - a^2) = 0,\\
&r^2(a^2 - a^2\cos^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + 2eb^2r\cos\varphi - b^4 = 0,\\
&r^2(a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2\varphi) + 2eb^2r\cos\varphi - b^4 = 0,\\
&r^2(a^2 - e^2\cos^2\varphi) + 2eb^2r\cos\varphi - b^4 = 0.
\end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in r mit den Lösungen

$$\begin{aligned}
r &= \frac{-2eb^2\cos\varphi \pm \sqrt{4e^2b^4\cos^2\varphi + 4b^4(a^2 - e^2\cos^2\varphi)}}{2(a^2 - e^2\cos^2\varphi)}\\
&= \frac{-2eb^2\cos\varphi \pm \sqrt{4b^4a^2}}{2(a^2 - e^2\cos^2\varphi)}\\
&= \frac{-2eb^2\cos\varphi \pm 2b^2a}{2(a^2 - e^2\cos^2\varphi)}\\
&= \frac{b^2(\pm a - e\cos\varphi)}{(a - e\cos\varphi)(a + e\cos\varphi)}
\end{aligned}$$

Damit r positiv wird, wählen wir das positive Vorzeichen. Dann können wir kürzen und erhalten schließlich

$$r = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi} = \frac{b^2/a}{1 + (e/a)\cos\varphi}.$$

Setze $p = \frac{b^2}{a}$ und $\varepsilon = \frac{e}{a}$ (die sogenannte **Exzentrizität**). Dann vereinfacht sich die Polarkoordinatendarstellung zu

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

In analoger Weise ergibt sich

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

für die Darstellung mit dem anderen Brennpunkt im Ursprung.

Dieselbe Darstellung, nämlich

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

ergibt sich für alle Kegelschnitte, wobei $\varepsilon = 0$ für den Kreis, $0 < \varepsilon < 1$ für die Ellipse, $\varepsilon = 1$ für die Parabel und $\varepsilon > 1$ für die Hyperbel gilt.