

Die Torsion einer Kurve, FRENETsche Formeln

Die **Torsion** einer Raumkurve wird definiert durch

$$\tau = -\vec{b}' \cdot \vec{n}.$$

Sie misst die Abweichung von einer ebenen Kurve. Das Vorzeichen ist dabei so gewählt, dass sich für positive Torsion τ die Kurve in derselben Richtung aus der Schmiegeebene herauswindet wie $\vec{b}$.

Begründung: Für eine ebene Kurve ist der Binormalvektor konstant gleich dem Normalvektor der Ebene. Es folgt

$$\vec{b}' = \vec{0}.$$

Daher ist die Torsion einer ebenen Kurve 0. Für allgemeine Kurven dagegen erhalten wir

$$\vec{b}' = \frac{d}{ds}(\vec{t} \times \vec{n}) = \vec{t}' \times \vec{n} + \vec{t} \times \vec{n}' = \kappa \vec{n} \times \vec{n} + \vec{t} \times \vec{n}' = \vec{t} \times \vec{n}'.$$

Es folgt $\vec{t} \perp \vec{b}'$. Zudem gilt wegen $\vec{b}^2 = 1$

$$0 = \frac{d}{ds} \vec{b}^2 = 2\vec{b} \cdot \vec{b}'$$

auch $\vec{b}' \perp \vec{b}$. Somit muss $\vec{b}'$ ein Vielfaches von $\vec{n}$ sein: $\vec{b}' = \lambda \vec{n}$. Damit folgt

$$\tau = -(\lambda \vec{n}) \cdot \vec{n} = -\lambda \vec{n}^2 = -\lambda,$$

also

$$\boxed{\vec{b}' = -\tau \vec{n}}$$

und damit $|\vec{b}'| = |\tau||\vec{n}| = |\tau|$. Zusammen mit der bereits bekannten Gleichung

$$\boxed{\vec{t}' = \kappa \vec{n}}$$

haben wir bereits zwei der drei **Formeln von Frenet**. Wir suchen noch einen Ausdruck für $\vec{n}'$. Wegen $\vec{n}^2 = 1$ gilt

$$0 = \frac{d}{ds} \vec{n}^2 = 2\vec{n} \cdot \vec{n}',$$

also $\vec{n}' \perp \vec{n}$. Es gibt somit Konstante α, β , sodass

$$\vec{n}' = \alpha \vec{t} + \beta \vec{b}.$$

Wir erhalten

$$\vec{n}' \cdot \vec{t} = \alpha(\vec{t} \cdot \vec{t}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{t}) = \alpha$$

und

$$\vec{n}' \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{t} \cdot \vec{b}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{b}) = \beta.$$

Weiters gilt $\vec{n} \cdot \vec{t} = 0$ und daher

$$\vec{n}' \cdot \vec{t} + \vec{n} \cdot \vec{t}' = 0.$$

Es folgt

$$\alpha = \vec{n}' \cdot \vec{t} = -\vec{n} \cdot \vec{t}' = -\vec{n} \cdot (\kappa \vec{n}) = -\kappa$$

und in völlig analoger Weise

$$\beta = \vec{n}' \cdot \vec{b} = -\vec{n} \cdot \vec{b}' = -\vec{n} \cdot (-\tau \vec{n}) = \tau.$$

Also erhalten wir

$$\boxed{\vec{n}' = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}.}$$

Aus den drei Formeln von Frenet, nämlich

$$\begin{aligned}\vec{t}' &= \kappa\vec{n}, \\ \vec{n}' &= -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}, \\ \vec{b}' &= -\tau\vec{n},\end{aligned}$$

leitet man den **Hauptsatz der Kurventheorie** her:

Satz. Eine Kurve ist durch Angabe von Krümmung und Torsion bis auf ihre Lage im Raum eindeutig bestimmt.