Harmonischer Oszillator

Auslenkung: $x = x(t)$

Kraft = Masse · Beschleunigung = $-c$ · Auslenkung

($c\ldots$ Federkonstante)

$$mx'' = -cx \iff x'' + \frac{c}{m}x = 0.$$

Setze $\omega^2 = \frac{c}{m}$. Dann ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x_H(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t).$$

Erweitere das Modell um eine äußere Anregung mit Frequenz ν:

$$x'' + \omega^2 x = \sin(\nu t).$$

Fall 1: $\omega \neq \nu$. In diesem Fall lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned}
x_I(t) &= A\sin(\nu t) + B\cos(\nu t),\\
x_I'(t) &= A\nu\cos(\nu t) - B\nu\sin(\nu t),\\
x_I''(t) &= -A\nu^2\sin(\nu t) - B\nu^2\cos(\nu t).
\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
&-A\nu^2\sin(\nu t) - B\nu^2\cos(\nu t) + \omega^2(A\sin(\nu t) + B\cos(\nu t))\\
&= A(\omega^2 - \nu^2)\sin(\nu t) + B(\omega^2 - \nu^2)\cos(\nu t) = \sin(\nu t)
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich: $A = \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}$, $B = 0$.

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung

$$x_I(t) = \frac{\sin(\nu t)}{\omega^2 - \nu^2}$$

und als allgemeine Lösung

$$x(t) = \frac{\sin(\nu t)}{\omega^2 - \nu^2} + C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t).$$

Fall 2: $\omega = \nu$. In diesem Fall lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned}
x_I(t) &= t(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)),\\
x_I'(t) &= A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\\
&\quad + t(A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)),\\
x_I''(t) &= 2A\omega\cos(\omega t) - 2B\omega\sin(\omega t)\\
&\quad - t(A\omega^2\cos(\omega t) + B\omega^2\sin(\omega t)).
\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
2A\omega\cos(\omega t) - 2B\omega\sin(\omega t) - t(A\omega^2\cos(\omega t) + B\omega^2\sin(\omega t))\\
+ \omega^2 t(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t))\\
= 2A\omega\cos(\omega t) - 2B\omega\sin(\omega t) = \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich: $A = 0$, $B = -\frac{1}{2\omega}$.

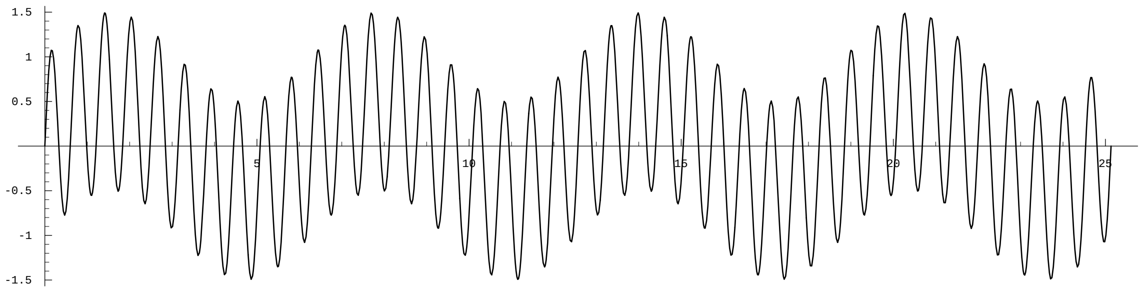
Damit ergibt sich die partikuläre Lösung

$$x_I(t) = -\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t)$$

und als allgemeine Lösung

$$x(t) = -\frac{t}{2\omega}\cos(\omega t) + C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t).$$

Ohne äußere Resonanz:



Mit äußerer Resonanz: