Hauptachsentransformation

Allgemeine Form:

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0.$$

Vektoriell:

$$\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{p}^T \cdot \vec{x} + f = 0,$$

wobei

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}.$$

Fall 1: $\det A \neq 0$. In diesem Fall eliminieren wir zunächst die linearen Terme durch eine Translation: $\vec{x} = \vec{y} + \vec{q}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &(\vec{y} + \vec{q})^T \cdot A \cdot (\vec{y} + \vec{q}) + \vec{p}^T \cdot (\vec{y} + \vec{q}) + f \\ &= \vec{y}^T \cdot A \cdot \vec{y} + (2\vec{q}^T \cdot A + \vec{p}^T) \cdot \vec{y} + (\vec{q}^T \cdot A \cdot \vec{q} + \vec{p}^T \cdot \vec{q} + f) = 0. \end{aligned}$$

Wir wollen

$$2\vec{q}^T \cdot A + \vec{p}^T = (2A \cdot \vec{q} + \vec{p})^T = 0,$$

also

$$\vec{q} = -\frac{1}{2} \cdot A^{-1} \cdot \vec{p}.$$

Dann ergibt sich eine Gleichung der Form

$$\vec{y}^T \cdot A \cdot \vec{y} + f^* = 0$$

mit

$$f^* = f + \frac{1}{2} \cdot \vec{p}^T \cdot \vec{q}.$$

Durch die Transformation $\vec{y} = T^T \cdot \vec{z} = B \cdot \vec{z}$ mit einer geeigneten orthogonalen Matrix T wird daraus

$$\vec{z}^T \cdot D \cdot \vec{z} + f^* = 0$$

mit einer Diagonalmatrix D, also

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + f^* = 0,$$

was die Normalform eines Kegelschnitts ist (Ellipse, Hyperbel, degenerierte Fälle).

Fall 2: $\det A = 0$. In diesem Fall hat A keine Inverse, wir wenden daher zuerst die Transformation $\vec{x} = T^T \cdot \vec{y} = B \cdot \vec{y}$ an. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{y}^T \cdot (B^T \cdot A \cdot B) \cdot \vec{y} + (\vec{p}^T \cdot B) \cdot \vec{y} + f& \\ = \vec{y}^T \cdot D \cdot \vec{y} + \vec{r}^T \cdot \vec{y} + f &= 0,\end{aligned}$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist, von denen ein Diagonaleintrag 0 ist (0 muss Eigenwert von A sein). Also erhält man eine Gleichung der Form

$$\lambda_1 \cdot y_1^2 + \widehat{d} \cdot y_1 + \widehat{e} \cdot y_2 + f = 0.$$

Nun kann man durch quadratisches Ergänzen und Translation auf Normalform bringen (Parabel, degenerierte Fälle). Wenn A die Nullmatrix ist, dann sind beide Eigenwerte 0, und es ergibt sich eine Gerade.