Klassifizierung von Kegelschnitten

Allgemeine Form:

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0.$$

Vektoriell:

$$\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{p}^T \cdot \vec{x} + f = 0,$$

wobei

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}.$$

Wir können immer so transformieren, dass $b = 0$:

$$ax_1^2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0.$$

Fall 1: $a \neq 0$, $c \neq 0$. Quadratisches Ergänzen führt auf

$$a\left(x_1^2 + \frac{d}{a}x_1 + \frac{d^2}{4a^2}\right) + c\left(x_2^2 + \frac{e}{c}x_2 + \frac{e^2}{4c^2}\right) + f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c} = 0$$

beziehungsweise

$$a\left(x_1 + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(x_2 + \frac{e}{2c}\right)^2 + f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c} = 0.$$

Durch die Parallelverschiebung $\widehat{x}_1 = x_1 + \frac{d}{2a}$, $\widehat{x}_2 = x_2 + \frac{e}{2c}$ wird daraus

$$a\widehat{x}_1^2 + c\widehat{x}_2^2 + f^* = 0.$$

Ist $f^* \neq 0$, dann dividiere durch f^*:

$$\frac{\widehat{x}_1^2}{-f^*/a} + \frac{\widehat{x}_2^2}{-f^*/c} = 1.$$

Je nach Vorzeichen ist dies die Gleichung einer Ellipse, einer Hyperbel, oder hat keine Lösung. Für $f^* = 0$ ergibt sich

$$a\widehat{x}_1^2 + c\widehat{x}_2^2 = 0.$$

Haben a und c gleiches Vorzeichen, ist $(0,0)$ die einzige Lösung. Andernfalls ergeben sich zwei Geraden durch den Ursprung.

Fall 2: $a \neq 0$, $c = 0$ (oder umgekehrt). Quadratisches Ergänzen führt auf

$$a\left(x_1^2 + \frac{d}{a}x_1 + \frac{d^2}{4a^2}\right) + ex_2 + f - \frac{d^2}{4a} = 0$$

beziehungsweise

$$\left(x_1 + \frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{e}{a}\left(x_2 + \frac{f}{e} - \frac{d^2}{4ae}\right) = 0.$$

Ist $e \neq 0$, dann führt die Parallelverschiebung $\widehat{x}_1 = x_1 + \frac{d}{2a}$, $\widehat{x}_2 = x_2 + \frac{f}{e} - \frac{d^2}{4ae}$ auf eine Parabelgleichung:

$$\widehat{x}_1^2 + \frac{e}{a}\widehat{x}_2 = 0.$$

Ist $e = 0$, dann bleibt eine Gleichung in einer einzigen Variablen übrig:

$$\left(x_1 + \frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{f}{a} - \frac{d^2}{4a^2} = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt entweder zwei Geraden, oder eine Doppelgerade, oder hat keine Lösung.

Fall 3: $a = 0$, $c = 0$. In diesem Fall bleibt eine Geradengleichung übrig:

$$dx_1 + ex_2 + f = 0.$$

Zusammenfassung:

- Ellipse (Spezialfall: Kreis)
- Hyperbel
- Parabel
- Zwei Geraden
- Eine Gerade
- Ein Punkt
- Keine Lösung