Wiederholung. Ein System von n linear unabhängigen Vektoren $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ im Raum $\mathbb{R}^n$ wird als **Basis** bezeichnet. Eine **Orthonormalbasis** hat die zusätzliche Eigenschaft

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Die Basisvektoren einer Orthonormalbasis sind also **normiert** und **paarweise orthogonal**.

Satz. Jeder beliebige Vektor $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^n$ kann in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ dargestellt werden:

$$\vec{v} = x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_n \vec{b}_n.$$

Die Koeffizienten $x_1, \dots, x_n$ heißen **Koordinaten** bezüglich der Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$.

Definition. Unter einer **Koordinatentransformation** versteht man den Übergang von einer Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ auf eine neue Basis $(\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_n)$. Dadurch ändern sich die Koordinaten eines Vektors.

Gegeben sei die Darstellung eines Vektors $\vec{v}$ bezüglich einer Basis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$:

$$\vec{v} = x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2.$$

Wir suchen die Koordinaten bezüglich einer neuen Basis:

$$\vec{v} = x'_1 \vec{b}'_1 + x'_2 \vec{b}'_2.$$

Stelle die neuen Basisvektoren als Linearkombination der alten dar:

$$\begin{aligned} \vec{b}'_1 &= t_{11} \vec{b}_1 + t_{12} \vec{b}_2, \\ \vec{b}'_2 &= t_{21} \vec{b}_1 + t_{22} \vec{b}_2. \end{aligned}$$

Die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

heißt **Transformationsmatrix**. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x'_1 \vec{b}'_1 + x'_2 \vec{b}'_2 = x'_1 (t_{11} \vec{b}_1 + t_{12} \vec{b}_2) + x'_2 (t_{21} \vec{b}_1 + t_{22} \vec{b}_2) \\ &= (x'_1 t_{11} + x'_2 t_{21}) \vec{b}_1 + (x'_1 t_{12} + x'_2 t_{22}) \vec{b}_2 \end{aligned}$$

und wegen der Eindeutigkeit der Koordinaten

$$x_1 = x'_1 t_{11} + x'_2 t_{21}, \quad x_2 = x'_1 t_{12} + x'_2 t_{22}.$$

Also gilt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = T^T \cdot \vec{x}'.$$

Somit erhalten wir die **Transformationsformel**

$$\vec{x}' = (T^T)^{-1} \cdot \vec{x}.$$