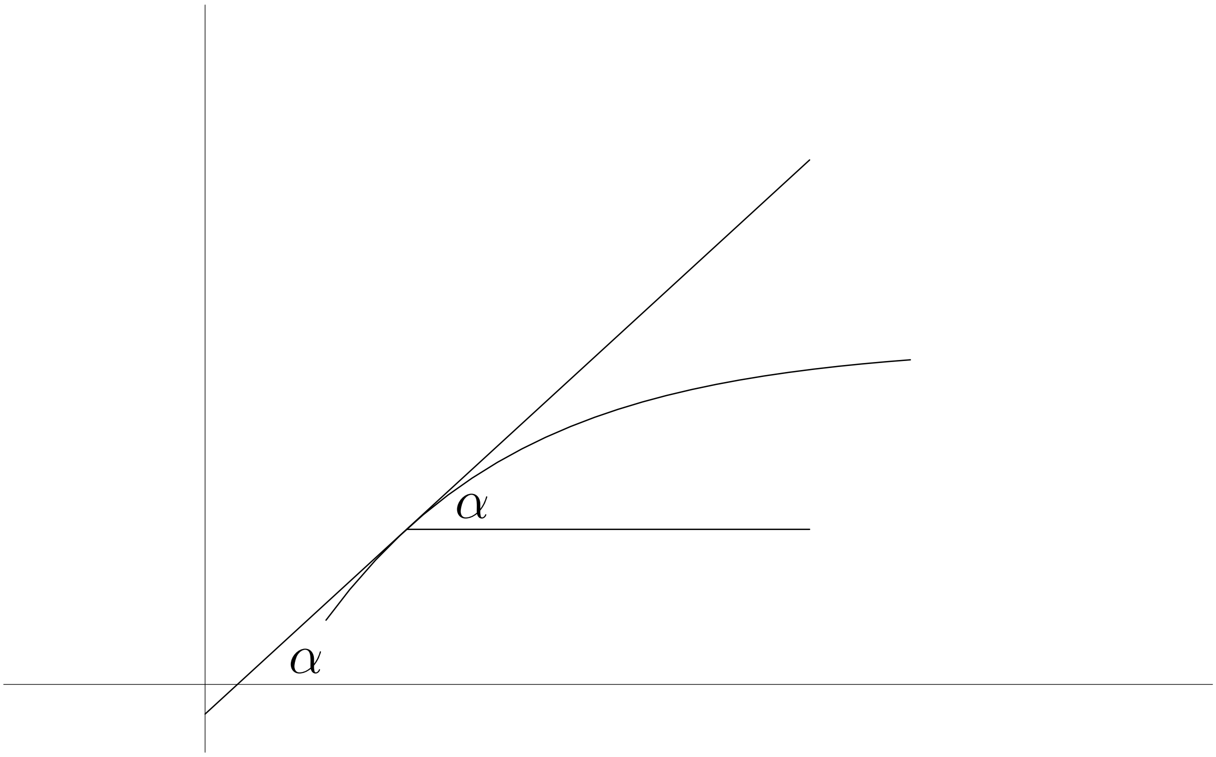
Die Krümmung einer Kurve



Die **Richtung** einer Kurve ist durch den Winkel α zwischen Tangente und x-Achse gegeben; die **Krümmung** ist die Änderung der Richtung bezüglich der Bogenlänge s, also

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Der Winkel α steht zur Tangentensteigung im Zusammenhang

$$\tan\alpha = k = y'.$$

Also $\alpha = \arctan y'$ und in weiterer Folge

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d}{dx}\arctan y' = \frac{y''}{1+y'^2}.$$

Zudem folgt aus der Formel für die Bogenlänge, nämlich

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'(\xi)^2}\, d\xi,$$

dass die Ableitung von s nach x gleich

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

ist. Zusammengefasst erhält man

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{y''}{1+y'^2}}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

In Parameterdarstellung: Sind $x = x(t)$ und $y = y(t)$ Funktionen eines Parameters t, dann gilt

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

und

$$y'' = \frac{d}{dx}\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

Durch Einsetzen erhält man damit

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \cdot \left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right)^{-3/2} \\
&= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \cdot \dot{x}^3 \cdot \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{-3/2} \\
&= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$