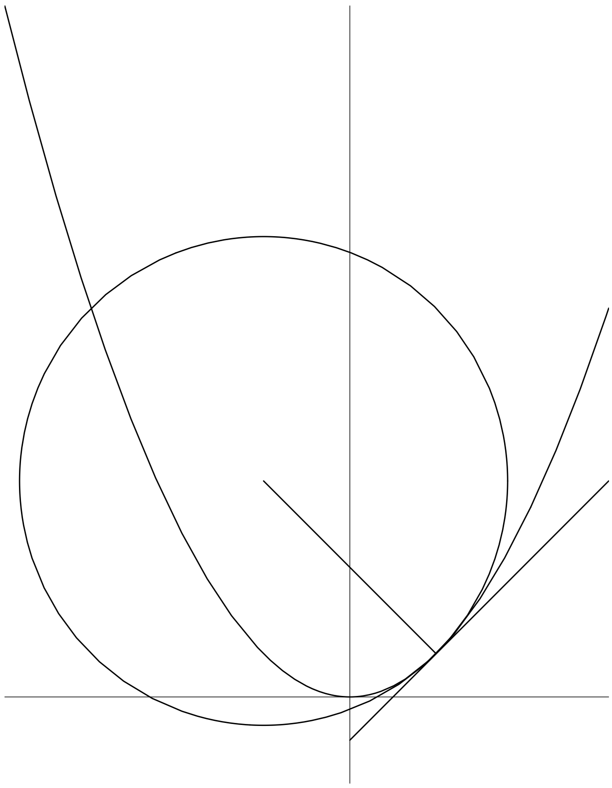
Krümmungskreise



Der **Krümmungskreis** in einem Punkt P einer Kurve ist jener Kreis, der die Kurve in diesem Punkt berührt (die Tangenten stimmen also überein) und dieselbe Krümmung hat.

Die Menge aller Krümmungskreismittelpunkte einer Kurve heißt **Evolute**.

Der Radius des Krümmungskreises muss somit $R = \frac{1}{\kappa}$ sein. Gesucht wird der Kreismittelpunkt (ξ, η). Die Richtung der Normalen im Punkt (x, y) ist $-\frac{1}{y'}$, der Kreismittelpunkt erfüllt also

$$y - \eta = -\frac{1}{y'}(x - \xi).$$

Aus der Kreisgleichung folgt

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = R^2 = \frac{1}{\kappa^2} = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

und damit

$$(x-\xi)^2 + \frac{1}{y'^2}(x-\xi)^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Auflösen ergibt

$$\begin{aligned}(x-\xi)^2 &= \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{y'^2(1+y'^2)^2}{y''^2} = \left(\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right)^2\end{aligned}$$

und schließlich

$$\xi = x \pm \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

und durch Rückeinsetzen

$$\eta = y \mp \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Das Vorzeichen muss so gewählt werden, dass bei positiver Krümmung der Mittelpunkt des Kreises über dem Berührpunkt liegt:

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

In Parameterdarstellung: Sind $x = x(t)$ und $y = y(t)$ Funktionen eines Parameters t, dann setzt man die Formeln

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

ein und erhält nach einigen Umformungen

$$\xi = x - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{y}}{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}, \qquad \eta = y + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{x}}{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}.$$