Kurvenintegrale

Wir betrachten einen Körper, der in einem Kraftfeld

$$\vec{K} = \vec{K}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$$

entlang einer Kurve $\mathcal{C}$, definiert durch

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad a \le t \le b,$$

bewegt wird. Zur Berechnung der dabei verrichteten Arbeit (= Kraft · Weg) approximieren wir die Kurve durch einen Polygonzug, indem wir Zwischenpunkte t_i einführen:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

Auf der Strecke von $\vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$ nach $\vec{x}_{i+1} = \vec{x}(t_{i+1})$ wird eine Arbeit von

$$\begin{aligned} \vec{K}(\vec{x}_i) \cdot (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) = \vec{K}(\vec{x}_i) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} \\ = P(\vec{x}_i)\Delta x_i + Q(\vec{x}_i)\Delta y_i + R(\vec{x}_i)\Delta z_i \end{aligned}$$

verrichtet. Insgesamt kommt man damit auf

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} P(\vec{x}_i)\Delta x_i + Q(\vec{x}_i)\Delta y_i + R(\vec{x}_i)\Delta z_i.$$

Nun verwendet man die Approximationen $\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \approx \dot{x}(t_i)$, $\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \approx \dot{y}(t_i)$, $\frac{\Delta z_i}{\Delta t_i} \approx \dot{z}(t_i)$ mit $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$:

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\vec{x}_i)\dot{x}(t_i) + Q(\vec{x}_i)\dot{y}(t_i) + R(\vec{x}_i)\dot{z}(t_i)\right) \Delta t_i.$$

Lässt man die Feinheit der Zerlegung gegen 0 streben ($\Delta t_i \to 0$), dann erhält man im Grenzwert das Integral

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \left(P(\vec{x}(t))\dot{x}(t) + Q(\vec{x}(t))\dot{y}(t) + R(\vec{x}(t))\dot{z}(t)\right)\, dt \\ &= \int_a^b \vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt = \int_{\mathcal{C}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz. \end{aligned}$$

Dieses Integral wird als **Kurvenintegral** bezeichnet.