

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Allgemeine Form:

$$y' + f(x)y = g(x).$$

Homogene Gleichung:

$$y' + f(x)y = 0$$

ist eine Gleichung mit getrennten Variablen.

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} = -f(x) &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -f(x) dx \\ \Rightarrow \ln |y| &= \int \frac{dy}{y} = - \int f(x) dx + C\end{aligned}$$

und damit

$$y = \pm e^C \cdot e^{-\int f(x) dx} = K \cdot e^{-\int f(x) dx}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Inhomogene Gleichung: Die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer beliebigen speziellen Lösung (der **partikulären Lösung**) der inhomogenen Gleichung zusammen:

$$y = y_H + y_I.$$

Eine solche Lösung findet man durch **Variation der Konstanten**:

$$y_I(x) = K(x) \cdot e^{-\int f(x) dx} = K(x)y_H(x).$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} y_I'(x) + f(x)y_I(x) &= K'(x)y_H(x) + K(x)y_H'(x) + f(x)K(x)y_H(x) \\ &= K'(x)y_H(x) + K(x)(y_H'(x) + f(x)y_H(x)) \\ &= K'(x)y_H(x) = g(x). \end{aligned}$$

Es folgt

$$K(x) = \int \frac{g(x)}{y_H(x)} dx,$$

und damit

$$y_I(x) = \left(\int \frac{g(x)}{y_H(x)} dx \right) \cdot y_H(x).$$