Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Allgemeine Form:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = s(x).$$

Der Ausdruck

$$L[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y$$

heißt **linearer Differentialoperator**. Es gilt

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]$$

für beliebige reelle Zahlen C_1, C_2 und Funktionen y_1, y_2.

Definition. Die Gleichung $L[y] = 0$ heißt **homogene Differentialgleichung**, die Gleichung $L[y] = s(x)$ **inhomogene Differentialgleichung**.

Satz.

- Die Funktion $y(x) \equiv 0$ ist stets Lösung der homogenen Differentialgleichung (triviale Lösung).
- Sind $y_1, y_2, \ldots, y_k$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung, dann auch

  $$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ky_k$$

  für beliebige Konstanten $C_1, \ldots, C_k$.

Definition. Die Funktionen $y_1, \ldots, y_k$ heißen **linear abhängig**, falls es Konstanten $C_1, \ldots, C_k$ gibt (nicht alle gleich 0), sodass

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_k y_k = 0.$$

Andernfalls heißen sie **linear unabhängig**.

Satz. Die Funktionen $y_1, \ldots, y_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die **Wronski-Determinante**

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_k' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_k'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

ungleich Null ist.

Definition. Die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ bilden ein **Fundamentalsystem** der homogenen Differentialgleichung $L[y] = 0$, wenn

- Die Funktionen Lösungen von $L[y] = 0$ sind,
- sie linear unabhängig sind,
- und sich jede Lösung der Gleichung $L[y] = 0$ als Linearkombination $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_k y_k$ schreiben lässt.

Satz.

- Zu jeder homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung gibt es ein Fundamentalsystem aus n Lösungen $y_1, y_2, \dots, y_n$.
- Ein System von n Lösungen $y_1, y_2, \dots, y_n$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die Wronski-Determinante ungleich Null ist.