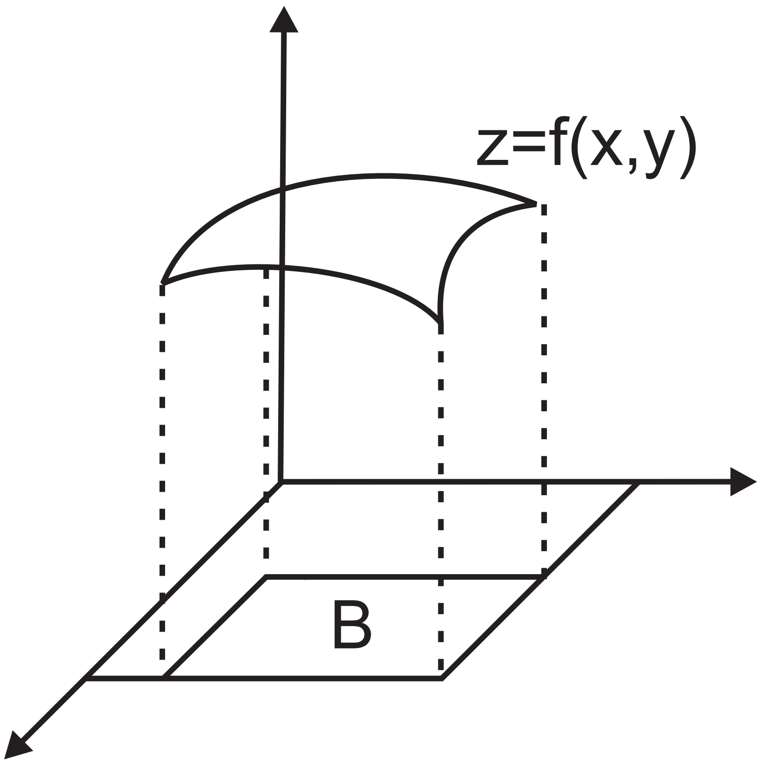
Mehrfachintegrale

Wir interessieren uns für das Volumen zwischen der xy-Ebene und einer Fläche, die durch die Funktion $z = f(x,y)$ beschrieben wird, auf einem rechteckigen Bereich

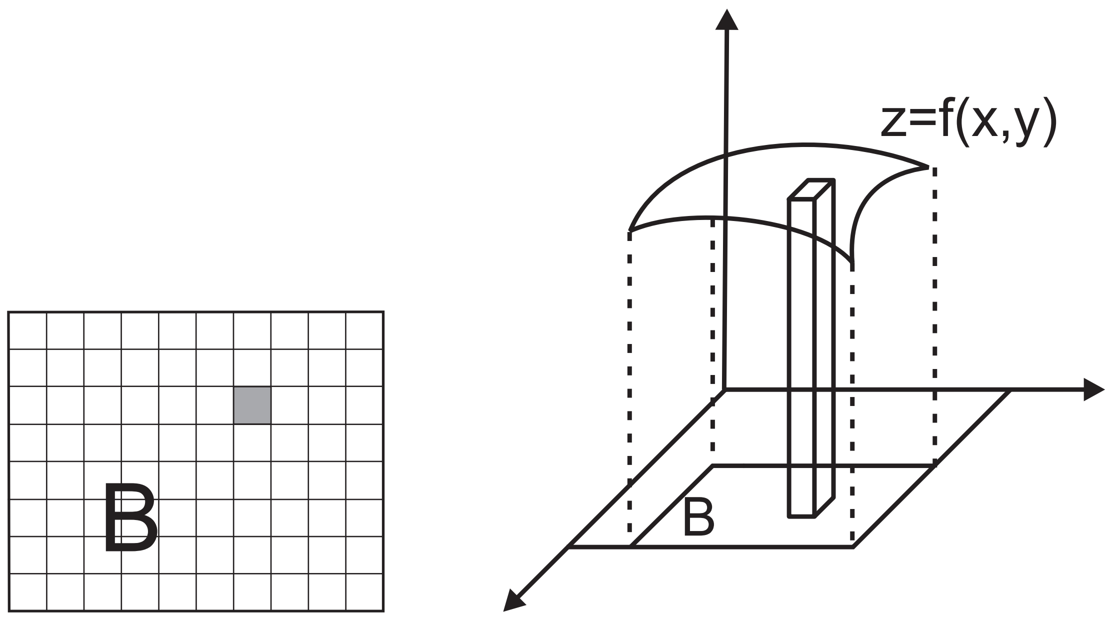
$$B = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \,:\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}.$$



Ähnlich wie für einfache Integrale zerlegen wir den Bereich in kleinere Teile und approximieren das Volumen durch "Säulen". Wir wählen dazu Zwischenpunkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_M = d$$

und zerlegen den Bereich in Rechtecke der Form $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.



Für die Höhe der zugehörigen Säule wählen wir den Funktionswert in einem Punkt (ξ_i, η_j) des Rechtecks. Die Länge und Breite sind

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad \text{und} \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j.$$

Wir erhalten somit die folgende Approximation für das Volumen:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

eine **Riemannsche Summe** in zwei Dimensionen. Lassen wir nun die Feinheit

$$L = \max_{i,j}(\Delta x_i, \Delta y_j)$$

der Zerlegung gegen 0 gehen, dann erhalten wir als Grenzwert das sogenannte **Doppelintegral**

$$\iint_B f(x,y)\, dx\, dy.$$

Satz. Ist die Funktion stückweise stetig im Bereich B, dann existiert der Grenzwert, genannt das **bestimmte Integral über dem Bereich** B. Es gilt

$$\begin{aligned}\iint_B f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\right)\,dy\\ &= \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\right)\,dx.\end{aligned}$$

Genau gleich kann man auch für Funktionen in drei Variablen vorgehen, um das **Dreifachintegral** über einem quaderförmigen Bereich

$$B = \{(x,y,z)\,:\, a\le x\le b,\, c\le y\le d, p\le z\le q\}.$$

zu definieren: der Bereich wird nun in kleine Quader zerlegt. Es gilt ganz analog

$$\begin{aligned}\iint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_{z=p}^{q}\left(\int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,y,z)\,dx\right)\,dy\right)\,dz\\ &= \int_{x=a}^{b}\left(\int_{z=p}^{q}\left(\int_{y=c}^{d} f(x,y,z)\,dy\right)\,dz\right)\,dx\\ &= \dots\end{aligned}$$