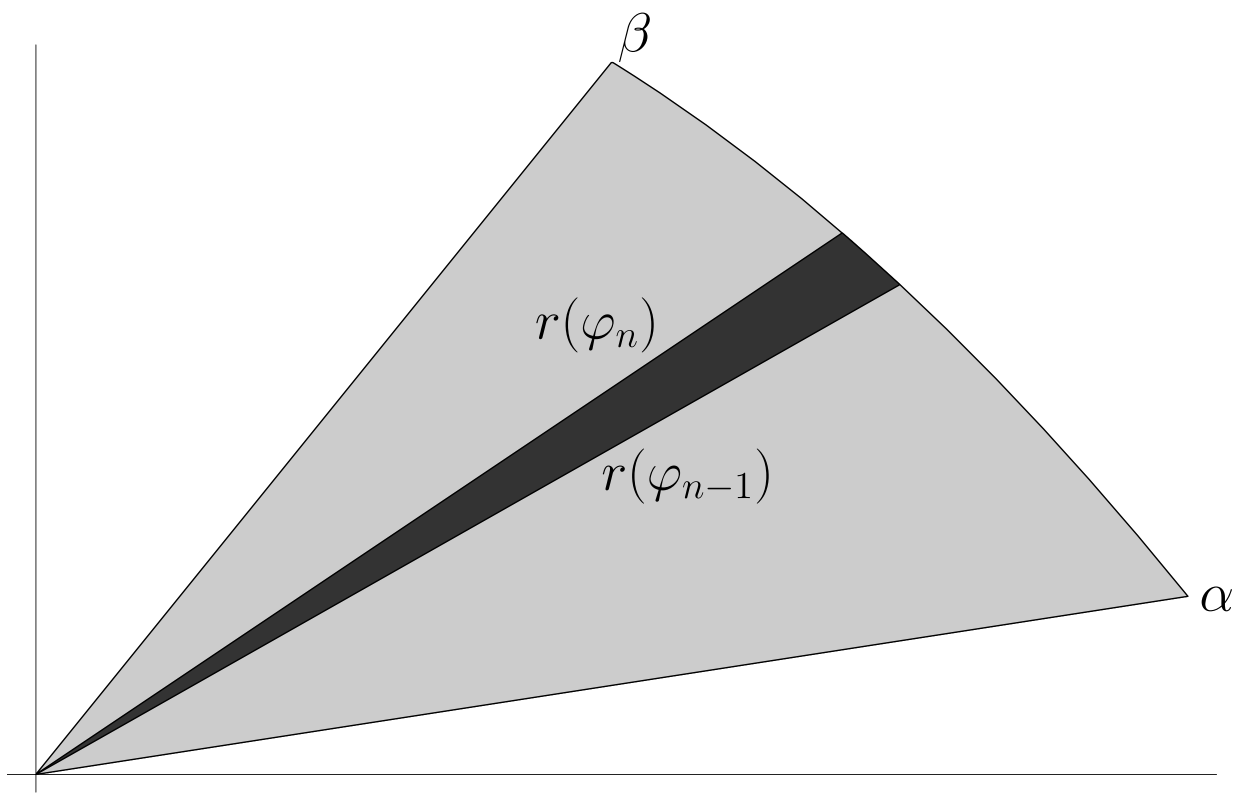
Die LEIBNIZsche Sektorformel



Betrachte zunächst eine Kurve in Polarkoordinatendarstellung. Wir approximieren die Fläche des Kurvensektors durch Kreissektoren. Deren Winkel ist

$$\Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1},$$

der Radius

$$r_n = r(\xi_n) \text{ für ein } \xi_n \in [\varphi_{n-1}, \varphi_n].$$

Die Fläche ist somit

$$A_n = r_n^2\pi \cdot \frac{\Delta\varphi_n}{2\pi} = \frac{r_n^2}{2}\Delta\varphi_n.$$

Also ergibt sich für die Gesamtfläche

$$A \approx \sum_{n=1}^{N} A_n = \sum_{n-1}^{N} \frac{r(\xi_n)^2}{2} \Delta\varphi_n.$$

Dies ist eine Riemannsche Summe. Im Grenzwert erhält man das Integral

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2}{2}\, d\varphi.$$

In Parameterdarstellung: Ist die Kurve in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben, dann kann man folgendermaßen auf Polarkoordinatendarstellung umrechnen:

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

und daher

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\, dt = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2}\, dt = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2 + y^2}\, dt.$$

Damit erhält man schließlich für die Fläche des Kurvensektors

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{r^2}\, dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{y}x - y\dot{x})\, dt.$$