

Systeme von Differentialgleichungen

Typisches Anwendungsbeispiel: $\vec{x} = \vec{x}(t)$ beschreibt die Bewegung eines Teilchens; $\vec{x}(t)$ ist die Position zum Zeitpunkt t :

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Es sei

$$\vec{K}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} P(\vec{x}) \\ Q(\vec{x}) \\ R(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

ein Kraftfeld. Nach dem Newton'schen Gesetz (Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung) folgt

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{K}(\vec{x}).$$

In einzelnen Komponenten angeschrieben:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= P(x_1, x_2, x_3), \\ m\ddot{x}_2 &= Q(x_1, x_2, x_3), \\ m\ddot{x}_3 &= R(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Dies ist ein System von drei Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Beobachtung. Ein System von Differentialgleichungen n -ter Ordnung kann auf ein System erster Ordnung zurückgeführt werden, indem man zusätzliche unbekannte Funktionen einführt. Dabei erhöht sich die Anzahl der Gleichungen.

Definition. Ein System von der Form

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

heißt **System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung**. Falls auf der rechten Seite die Variable t nicht vorkommt, d.h.

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}),$$

dann heißt das System **autonom**.

Komponentenweise:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, t). \end{aligned}$$

Zusätzlich kann man noch z.B. Anfangswerte vorgeben:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}.$$

Satz. Ist die vektorwertige Funktion $\vec{f}(\vec{x}, t)$ stetig differenzierbar, dann ist das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

eindeutig lösbar.

Definition. Ein **System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen** ist ein System von Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} + \vec{s}$$

mit Koeffizientenmatrix A und Störvektor s . Ist der Störvektor gleich $\vec{0}$, dann heißt das System **homogen**, ansonsten **inhomogen**. Sind A und s konstant, dann ist das System autonom.

Bemerkung. Eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung kann in ein System von n linearen Differentialgleichungen übergeführt werden.

Satz. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} + \vec{s}$$

erhält man als Summe einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

Satz. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$ ist eine Linearkombination von n linear unabhängigen Lösungen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$, die ein **Fundamentalsystem** bilden:

$$\vec{x}_H = C_1 \vec{y}_1 + \dots + C_n \vec{y}_n, \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen des homogenen Systems bilden einen Vektorraum.