Berechnung der Torsion

Die Definition

$$\tau = -\vec{n} \cdot \vec{b}'$$

ist zur Berechnung nicht praktisch. Wir bestimmen daher alternative Formeln für die Torsion. Zunächst wissen wir bereits, dass

$$\vec{b}' = \frac{d}{ds}(\vec{t} \times \vec{n}) = \vec{t}\,' \times \vec{n} + \vec{t} \times \vec{n}' = \kappa \vec{n} \times \vec{n} + \vec{t} \times \vec{n}' = \vec{t} \times \vec{n}'$$

gilt, und damit

$$\tau = -\vec{n} \cdot (\vec{t} \times \vec{n}') = -(\vec{n}, \vec{t}, \vec{n}') = (\vec{t}, \vec{n}, \vec{n}'),$$

wobei $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ das Spatprodukt dreier Vektoren bezeichnet. Nun gilt

$$\vec{t} = \vec{x}'$$

und weiters

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \tfrac{1}{\kappa}\vec{t}\,' = \tfrac{1}{\kappa}\vec{x}'', \\ \vec{n}' &= \left(\tfrac{1}{\kappa}\right)' \vec{x}'' + \tfrac{1}{\kappa}\vec{x}'''. \end{aligned}$$

Also erhalten wir das Spatprodukt

$$\begin{aligned} \tau &= \left(\vec{x}', \tfrac{1}{\kappa}\vec{x}'', \left(\tfrac{1}{\kappa}\right)' \vec{x}'' + \tfrac{1}{\kappa}\vec{x}'''\right) \\ &= \left(\vec{x}', \tfrac{1}{\kappa}\vec{x}'', \left(\tfrac{1}{\kappa}\right)' \vec{x}''\right) + \left(\vec{x}', \tfrac{1}{\kappa}\vec{x}'', \tfrac{1}{\kappa}\vec{x}'''\right) \\ &= 0 + \frac{1}{\kappa^2}(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}'''). \end{aligned}$$

Nun kann man noch verwenden, dass

$$\vec{x}''^2 = (\kappa \vec{n})^2 = \kappa^2$$

gilt, und erhält

$$\tau = \frac{1}{\vec{x}''^2}(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''').$$

Schließlich rechnen wir noch in Ableitungen bezüglich eines beliebigen Parameters um. Es gilt

$$\vec{x}' = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} = \frac{\dot{\vec{x}}}{\left(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}\right)^{1/2}},$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}'' &= \frac{d}{ds}\vec{x}' = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|} \cdot \frac{d}{dt}\vec{x}' = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|} \cdot \left(\frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{x}}}{\left(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}\right)^{1/2}} \right) \\
&= \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|} \cdot \left(\frac{\ddot{\vec{x}}}{\left(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}\right)^{1/2}} - \frac{2\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}}{2\left(\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}\right)^{3/2}} \cdot \dot{\vec{x}} \right) \\
&= \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|^2} \cdot \left(\ddot{\vec{x}} - \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^2} \cdot \dot{\vec{x}} \right),
\end{aligned}$$

und in gleicher Weise

$$\vec{x}''' = \frac{d}{ds}\vec{x}'' = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|} \cdot \frac{d}{dt}\vec{x}'' = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|} \cdot \left(\frac{1}{|\dot{\vec{x}}|^2} \dddot{\vec{x}} + \alpha \ddot{\vec{x}} + \beta \dot{\vec{x}} \right)$$

für gewisse Skalare α, β.

Da das Spatprodukt dreier Vektoren 0 ist, wenn zwei der Vektoren Vielfache voneinander sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''') &= \left(\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|^2} \cdot \left(\ddot{\vec{x}} - \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^2} \cdot \dot{\vec{x}} \right), \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|} \cdot \left(\frac{1}{|\dot{\vec{x}}|^2} \dddot{\vec{x}} + \alpha \ddot{\vec{x}} + \beta \dot{\vec{x}} \right) \right) \\
&= \left(\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \frac{\ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^2}, \frac{\dddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^3} \right) \\
&= \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|^6} \left(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}} \right)
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} (\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''') = \left(\frac{|\dot{\vec{x}}|^3}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|} \right)^2 \cdot \frac{1}{|\dot{\vec{x}}|^6} \left(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}} \right) = \frac{\left(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}} \right)}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}.$$