Variation der Konstanten

Wir betrachten inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = s(x).$$

(Wir können annehmen, dass der Koeffizient von y'' gleich 1 ist; gegebenenfalls durchdividieren.)

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung hat die Form

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung verwenden wir den Ansatz

$$y_I(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$$

Es folgt

$$y_I' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'.$$

Da zwei unbekannte Funktionen vorkommen, dürfen wir eine zusätzliche Bedingung zur Vereinfachung einführen:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0.$$

Dann vereinfacht sich die Ableitung y_I' zu

$$y_I' = C_1 y_1' + C_2 y_2',$$

und

$$y_I'' = C_1 y_1'' + C_1' y_1' + C_2 y_2'' + C_2' y_2'.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned}
y_I'' + a_1 y_I' + a_2 y_I &= C_1 y_1'' + C_1' y_1' + C_2 y_2'' + C_2' y_2' \\
&\quad + a_1(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\
&= C_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) \\
&\quad + C_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) \\
&\quad + C_1' y_1' + C_2' y_2'.
\end{aligned}$$

Da y_1 und y_2 Lösungen der homogenen Gleichung sind, fallen die Klammerausdrücke weg. Es bleibt

$$y_I'' + a_1 y_I' + a_2 y_I = C_1' y_1' + C_2' y_2' = s(x).$$

Damit haben wir zwei lineare Gleichungen für die Funktionen C_1' und C_2':

$$\begin{aligned}
C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0, \\
C_1' y_1' + C_2' y_2' &= s(x).
\end{aligned}$$

Wir lösen das Gleichungssystem mit der Cramer'schen Regel:

$$C_1' = -\frac{s(x) y_2(x)}{y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)}$$

und

$$C_2' = \frac{s(x) y_1(x)}{y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)}.$$

Damit ergibt sich schließlich

$$C_1 = -\int \frac{s(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}\,dx$$

und

$$C_2 = \int \frac{s(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}\,dx.$$