Irrfahrten
Wolfgang Woess

Einleitung

Wie im Einladungstext zum Symposium erklärt wird, hat die Kunstwelt seit jeher ein starkes Interesse an den formal-ästhetischen Aspekten der Mathematik. (Hier ist anzumerken, daß der Mathematiker dabei mitunter den Eindruck hat, daß hier vom Künstler Dinge “mystifiziert” werden, die für ihn selbst ganz und gar nicht geheimnisvoll sind.)

Umgekehrt ist in der Mentalität des Mathematikers der ästhetische Aspekt aus seiner Forschung nicht wegzudenken. Natürlich wird die persönliche Mischung von Ästhetik und Zweckdenken für jeden von uns verschiedem sein.

Im Bild, das sich die *Öffentlichkeit* von der Mathematik macht, hat aber der künstlerische Aspekt kaum Platz. Ich erinnere mich, wie eine befreundete Künstlerin (Musikerin) die Existenz eines solchen künstlerischen Aspektes strikt abgelehnt hat: die Mathematik sei zu rigide, um spontane Intuition - wesentlicher Bestandteil der küstlerischen Kreativität - zuzulassen.

Natürlich ist das falsch. Aber hier handelt es sich um ein intrinsisches Problem der Mathematik: es ist unheimlich schwer, mit Nichtmathematikern über die Inhalte der eigenen Forschung zu komunizieren, den meisten bleibt es unverständlich, was ein Mathematiker forschen kann und daß es überhaupt noch etwas zu forschen gibt.

Viele haben nur die negative Erinnerung aus der Schule behalten, wo sie die Mathematik als mehr oder weniger unverständliche Sammlung von seit eh und je bekannten Formeln erlebt haben, oder als Disziplinierungsmittel unbotmäßiger Schüler.

Es handelt sich hier also um eine Kunst, die nur ein begrenztes Publikum hat. Es haben auch andere moderne Kunstformen, z.B. moderne Musik oder auch Medienkunst, nur ein begrenztes Publikum, und hie wie da gibt man sich letzten Endes mit der Anerkennung der Fachwelt als Maßstab des Erfolges zufrieden.

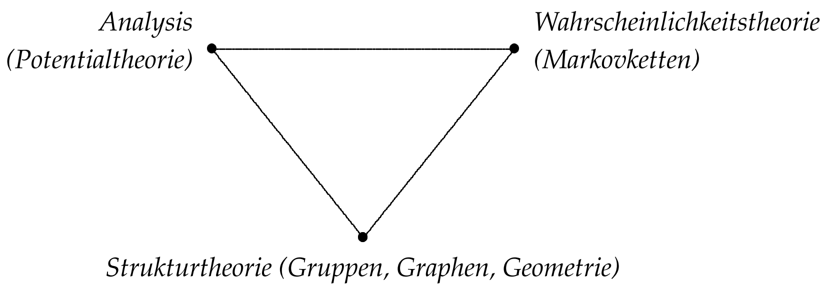
Hiezu kommt, daß es heute dem Mathematiker selbst eigentlich nicht erlaubt ist, den künstlerischen Aspekt seiner Arbeit offen zuzulassen. Die Universitäten und die Forschung sind fast ausschließlich auf Aspekte der unmittelbaren Wirtschaftlichkeit reduziert. Wobei man den Eindruck hat, daß die "Mäzene" der Wissenschaft - also Regierung und Politiker - in Zeitspannen von der Dauer einer Legislaturperiode denken und den materiellen Profit der Forschung entsprechend rasch erwarten.

Die Grundlagenfächer geraten da in die Defensive, und nur selten werden Mathematiker sich ein öffentliches Bekenntnis zum formal-ästhetischen Aspekt ihrer Forschung erlauben.

Thema dieser Veranstaltung ist aber sicher nicht die industrielle Verwertbarkeit meines Faches. Ich möchte in meinen Ausführungen aus meinem Arbeitsgebiet erzählen; dabei werde ich nicht vorrangig auf die neuesten Resultate meiner eigenen Forschung eingehen, sondern versuchen, ausgehend von einfachen Beispielen einen Faden zu spinnen, um neben rein mathematischen Inhalten ansatzweise auch Denkweise und Rezeption zu erläutern. Ganz bewußt werde ich in meiner Darstellung die genannte "industrielle Verwertbarkeit" komplett ausklammern.

Irrfahrten in endlichen und unendlichen Straßen

Bei den *Irrfahrten* denken manche wahrscheinlich zuerst and Homer und Odysseus. Hier geht es aber um eine gewisse Art von Zufallsprozessen; mein Arbeitsgebiet bewegt sich in einem Dreieck:



Beispiel 1: Irrfahrt des Betrunkenen. Ein Betrunkener will aus einem Gasthaus heimkehren. Das Gasthaus liegt an einer geraden Straße; an einem Ende befindet sich ein See, am anderen das Wohnhaus des Betrunkenen. Der Betrunkene erinnert sich nicht an die richtige Richtung. Er macht einen Schritt nach links oder rechts mit gleicher Wahrscheinlichkeit (1/2), dann hält er inne. Ohne sich zu erinnern, woher er beim letzten Schritt gekommen war,

irrt er in dieser Weise weiter: einen Schritt nach rechts oder links, mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/2$. Erreicht er den See, so fällt er hinein und ertrinkt; kommt er zu Hause an, so bleibt er dort und schläft seinen Rausch aus. Frage: mit welcher Wahrscheinlichkeit ertrinkt der Betrunkene, und mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er sein Haus?

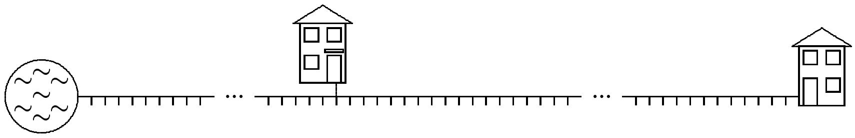


Abbildung 6.1.

Zur Berechnung formalisieren wir: wir nehmen an, daß jeder Schritt des Betrunkenen gleich lang ist. Sein Haus ist vom See n Schritte entfernt, das Gasthaus k Schritte. Die möglichen Positionen des Betrunkenen entsprechen den Zahlen $0, 1, \ldots, n-1, n$ (der Abstand vom See, in Schritten). Befindet sich der Betrunkene in Position i (zwischen 1 und $n-1$), so führt sein nächster Schritt mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ nach $i-1$, und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ nach $i+1$. (Man kann sich vorstellen, daß er vor jedem Schritt eine Münze wirft, um über die Richtung zu entscheiden.) Die Positionen 0 (See) und n (Haus) sind sogennante absorbierende Zustände: einmal dort angelangt, ist die Wahrschienlichkeit dort zu bleiben gleich 1.

Wir schreiben $w(i)$ für die Wahrscheinlichkeit, daß der Betrunkene, ausgehend von Position i, jemals nach Hause kommt. Dann ist $w(0) = 0$, da 0 für den absorbierenden Zustand "See" steht, von dem aus es unmöglich ist (Wahrscheinlichkeit 0), das Haus zu erreichen. Weiters ist $w(n) = 1$ (die 1 steht für "mit Sicherheit"), da der Betrunkene dann ja schon zu hause ist.

Für i zwischen 1 und $n-1$ führt der erste Schritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ nach $i-1$ oder $i+1$, von wo aus das Haus dann irgendwann erreicht werden soll. Dies drückt sich durch die Beziehung

$$w(i) = \frac{1}{2}w(i-1) + \frac{1}{2}w(i+1)\,.$$

Diese Gleichung nennt man eine lineare Rekursion; mit den Anfangswerten $w(0) = 0$ und $w(n) = 1$ ist sie leicht zu lösen, und man findet $w(i) = i/n$. Das Gasthaus steht an der Position k, also ist

$$\mathrm{W}[\text{nach hause}] = \frac{k}{n}\,, \quad \text{und analog} \quad \mathrm{W}[\text{ertrinken}] = 1 - \frac{k}{n}\,.$$

Beispiel 2: Irrfahrt entlang einer unendlich langen Straße. Wir lassen nun den See und das Haus unendlich weit in die Ferne rücken, d.h., verschwinden, sodaß wir es mit einer unendlich langen Strasse zu tun haben. Die Positionen werden nun mit den (negativen und positiven) ganzen Zahlen beschrieben, der Betrunkene startet in einem Punkt (z.B. in der Position 0). Die "Spielregel" ist dieselbe wie vorhin: wo immer der Betrunkene gerade ist, bleibt es dem Zufall überlassen, ob er den nächsten Schritt nach links oder rechts macht (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$).

Abbildung 6.2.

Bevor ich näher darauf eingehe, hier eine Anmerkung zum *Unendlichen.* Vor längerer Zeit habe ich mich mit einem Freund (angehender Arzt) über meine Arbeit unterhalten. Ich erklärte ihm, daß ich mich mit Irrfahrten auf unendlichen Strukturen beschäftige. Er war zunächst sehr fasziniert, dann aber auch enttäuscht, weil er sich vorgestellt hatte, daß meine Arbeit in allerhand philosophischen Spekulationen über das Unendliche bestehe. Solche Begriffe sind aber für uns nicht Gegenstand philosophischer Spekulation, sondern durch eine sinnvolle Axiomatik gegeben, werden in der Arbeit vorausgesetzt und sind sozusagen tägliches Brot des Mathematikers.

Ähnlich erinnere ich mich, wie ich als 12-jähriger von der Frage nach der Existenz einer - physisch existierenden - vierten Dimension fasziniert war. Für den Mathematiker ist das Rechnen, das Arbeiten in 4 oder 5 Dimensionen genauso natürlich wie in in 2 oder 3. Es besteht keine Notwendigkeit zur Speklulation hierüber, im Denkgebäude haben höhere Dimensionen ihren selbverständlichen Platz. Aber natürlich handelt es sich dabei nicht um eine 4. Dimension im Sinne einer physikalisch zu erforschenden Realität.

Zurück zur Irrfahrt entlang der unendlichen Straße. Dies ist ein Zufallsprozeß: wir haben es mit einer zeitlichen Abfolge von zufälligen Ereignissen (den einzelnen Schritten) zu tun, die durch ein gewisses "Gesetz" beschreiben werden (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ nach links oder rechts; wir könnten uns auch ein anderes Gesetz vorstellen, z.B. mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ nach rechts und $2/3$ nach links). Wir schreiben Z_n für die zufällige Position zum Zeitpunkt n; die Zeit ist hier diskret, also in ganzen Einheiten, eine Zeiteinheit ist ein Schritt des Irrfahrers.

Im Vergleich mit Beispiel 1 werden in der unendlichen Straße die Fragestellungen ganz anders! See und Haus sind verschwunden, die Umgebung ist sozusagen monotoner. Die erste typische Frage betrifft die Rückkehr zum Ausgangspunkt. Man nennt die Irrfahrt *rekurrent,* wenn es sicher ist, daß der Betrunkene irgendeinmal zum Ausgangspunkt zurückkehrt. "Sicher" bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit zurückzukehren gleich 1 ist. Andernfalls nennt man den Zufallsprozeß *transient.*

Bevor wir beantworten, ob die Irrfahrt entlang der unendlichen Strasse rekurrent oder transient ist, wollen wir das Problem noch auf andere Weise formulieren.

Wenn es sicher ist, daß der Irrfahrer einmal zum Ausgangspunkt zurückkehrt, so ist es auch sicher, daß er ein zweites, drittes, ... Mal wiederkehrt. Wir sind also sicher, unendlich oft zum Ausgangspunkt zurückzukehren:

$$\mathrm{W}[Z_n = 0 \quad \text{unendlich oft}] = 1\,.$$

Damit gleichwertig ist auch, daß im Verlauf der Zeit die mittlere Anzahl der Besuche im Ausgangspunkt unendlich groß wird. Das heißt, wir betrachten die Zufallsgröße N, deren Wert die Anzahl jener Zeitpunkte n ist, für die $Z_n = 0$ (die Ausgangsposition). N ist eine ganze Zahl oder $+\infty$. Der Mittelwert oder Erwartungswert $\mathrm{E}(N)$ ist die Summe über alle Ausdrücke $n \cdot \mathrm{W}[N = n]$. Er stimmt überein mit dem Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{W}[Z_n = 0].$$

Im transienten Fall ist hingegen die Wahrscheinlichkeit, (mindestens) einmal zurückzukehren eine Zahl $p < 1$, die Wahrscheinlichkeit, (mindestestens) zweimal zurückzukehren $\leq p^2$, die Wahrscheinlichkeit, (mindestestens) n mal zurückzukehren $\leq p^n$, also im Grenzwert

$$\mathrm{W}[Z_n = 0 \quad \text{unendlich oft}] = 0\,;$$

weiters ist im transienten Fall der Erwartungswert $\mathrm{E}(N)$ eine endliche Zahl.

Dies können wir nun zur Beantwortung der Frage nach Rekurrenz oder Transienz beantworten. Es ist eine einfache kombinatorische Aufgabe nachzuweisen, daß

$$\mathrm{W}[Z_{2n} = 0] = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\, n}}\,.$$

(Zu einem ungeraden Zeitpunkt kann man nicht zum Ausgangspunkt zurückkehren.) Das Symbol $\sim$ bedeutet hier "hat die Größenordnung von" (der Quotient zwischen linker und rechter Seite strebt gegen 1, wenn $n \to \infty$.) Die Reihe $\sum_n \frac{1}{\sqrt{\pi\, n}}$ divergiert ($= \infty$), also ist die Irrfahrt rekurrent.

Beispiel 3: zweidimensionales Straßennnetz. Die Beispiele 1 und 2 wurden schon von *Lord Rayleigh* im letzten Jahrhundert studiert. Wir spinnen nun die Gedanken weiter, so wie es der ungarische Mathematiker *Georg Pólya* in einer Arbeit tat, die 1921 in den *Mathematischen Annalen* unter dem schönen Titel "Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz" erschien.

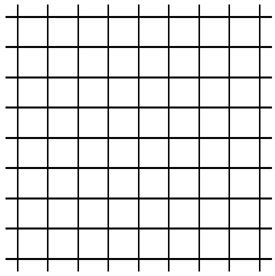


Abbildung 6.3.

Wir stellen uns ein unendliches, rechtwinkeliges, zweidimensionales Straßennetz (Gitter) vor. In jedem Kreuzungspunkt sind die Übergangswahrscheinlichkeiten $1/4$ in jede der vier Richtungen (Nord, Süd, Ost, West). Entsprechend der zufällig gewählten Richtung geht der Irrfahrer bis zur nächsten Kreuzung, wo er dann wieder über den nächsten, zufälligen Schritt entscheidet (z.B. indem er einen Tetraeder wirft, oder zwei Münzen).

Man findet leicht
$$\mathrm{W}[Z_{2n} = 0] \sim \frac{1}{\pi\, n}\,.$$
Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\, n}$ divergiert. Die Irrfahrt ist rekurrent.

Wie sieht es in höheren Dimensionen aus?

Beispiel 4: d-dimensionales Straßennetz. Im dreidimensionalen Straßennetz hat jeder Kreuzungspunkt 6 Nachbarpunkte (Nord, Süd, Ost, West, Oben, Unten); im d-dimensionalen Straßennetz (oder Gitter) hat jeder Punkt $2d$ Nachbarn. In jedem Kreuzungspunkt wählt der Irrfahrer mit Wahrscheinlichkeit $1/2d$ einen der Nachbarpunkte aus; dorthin führt der nächste Schritt, usw. Wir fragen wieder nach der Rückkehrwahrscheinlichkeit. Die Antwort gibt der folgende *Satz [Pólya, 1921]:*

Im d-dimensionalen Straßennetz gilt

$$\mathrm{W}[Z_{2n} = 0] \sim \frac{C_d}{\sqrt{n^d}}$$

Dabei ist C_d eine von der Dimension d abhängige Konstante. Für $d \geq 3$ ist daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{W}[Z_{2n} = 0] < \infty\,,$$

die Irrfahrt ist *transient!* Wie wir wissen, ist dies damit gleichbedeutend, daß

$$\mathrm{W}[\text{keine Rückkehr}] > 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{W}[Z_n = 0 \quad \text{unendlich oft}] = 0\,.$$

Weiters damit gleichwertig: für jede endliche Menge A von Kreuzungspunkten im Straßennetz (d-dim. Zahlengitter) ist

$$\mathrm{W}[Z_n \text{ besucht } A \text{ nur endlich oft}] = 1$$

Also in verliert sich der Zufallspunkt Z_n für zunehmendes n in gewissem Sinne in den undendlichen Weiten des Raumes.

Wir sehen einen drastischen Unterschied zwischen Dimension 2 und Dimension 3: im Zweidimensionalen ergeht es dem Irrfahrer ähnlich wie dem Verdurstenden in der Wüste, der nach einigem Herumirren auf Fußspuren stößt und hofft, die Rettung zu finden; in Wirklichkeit hat er aber seine eigenen Spuren wiedergefunden und irrt im Kreis. Im Dreidimensionalen hingegen verliert sich der Irrfahrer zu den "Grenzen" des Alls.

Damit ist für den Mathematiker zwar rein rechnerisch ein Problem gelöst, aber damit allein gibt er sich nicht zufrieden. Warum ist das so? Wie kann man ein besseres Verständnis des Phänomens erlangen? – Man *verallgemeinert,* sucht, das Problem in einen größeren Zusammenhang zu stellen, entwirft ein weiterreichendes Modell, in dem das zwei- und dreidimensionale Gitter als Spezialfälle vorkommen. Man will sozusagen zurücktreten und die Frage aus einer weiteren Perspektive betrachten!

Irrfahrten in unendlichen Graphen

Wir wollen uns nun kompliziertere unendliche Straßennetze vorstellen. Ein Straßennetz beschreiben wir als einen *Graphen,* also eine Menge X von Punkten oder *Knoten* (die "Kreuzungen") und Verbindungsstücken zwischen Punkten, den Kanten des Graphen. Jede Kante hat zwei Endpunkte, die dann als *Nachbarn* bezeichnet werden. Der Graph soll *zusammenhängend* sein: für je zwei Punkte gibt es einen Weg entlang von Kanten, der die beiden verbindet. Natürlich kann es auch mehr als einen Weg geben. Außerdem wird hier nur von *lokalendlichen* Graphen die Rede sein: von jedem Punkt x gehen nur endlich viele Kanten aus; deren Anzahl $\deg(x)$ ist der *Grad* von x.

Der Zufallsprozeß, den wir untersuchen wollen, ist wieder die sogenannte *einfache Irrfahrt* auf (oder in) dem Graphen X. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$p(x,y) = 1/\deg(x), \text{ falls } y \text{ zu } x \text{ benachbart ist, andernfalls } p(x,y) = 0.$$

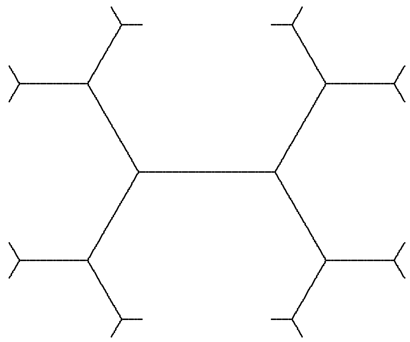


Abbildung 6.4

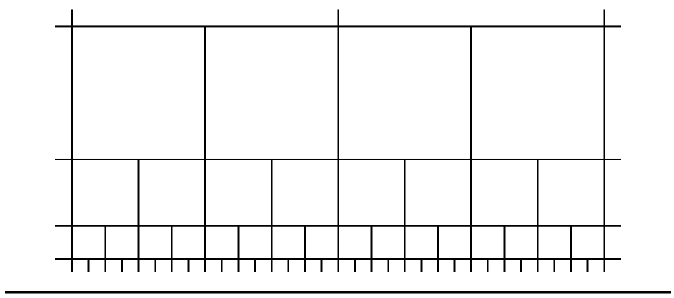


Abbildung 6.5

Befindet sich also der Irrfahrer zu irgendeinem Zeitpunkt im Knoten x, so wählt er nach dem Zufallsprinzip (Gleichverteilung) einen Nachbarn von x aus (mit Wahrscheinlichkeit $1/\deg(x)$), zu dem dann der nächste Schritt führt.

Wir bezeichnen wieder mit Z_n die zufällige Position zum Zeitpunkt n. Die generelle Fragestellung ist dann: was kann man über den Zusammenhang zwischen der Struktur des Graphen X und dem zeitlichen Verhalten der Irrfahrt Z_n aussagen?

Abbildungen 6.4 und 6.5 sind zwei Beispiele von unendlichen Graphen, die eine andere Struktur als die d-dimensionalen Gitter haben.

Irrfahrten, elektrische Netzwerke und Rohrsysteme

Wir schreiben $E(X)$ für die Kantenmenge unseres Graphen X. Wir interpretieren nun jede Kante Kante e in $E(X)$ nicht als Straßenstück, sondern als Leiterkabel mit elektrischem Widerstand 1 Ohm. Wenn wir wollen, können wir uns die Kante auch als 1 Meter langes Rohr vorstellen, dessen Querschnitt "genormt" ist (z.B. 10cm). An den Knoten von X sind die Kabel, bzw. Rohre verbunden. Wir wollen nun Strom durch das elektrische Netzwerk, beziehungsweise Wasser (oder besser eine "ideale" nicht komprimierbare Flüssigkeit) durch das Rohrsystem schicken.

Um einen *Fluß* im Netzwerk zu formalisieren, legen wir zunächst für jede Kante e eine Orientierung fest, sodaß wir von einem Anfangsknoten e^- und einem Endknoten e^+ in X sprechen können. Ein Fluß ist dann eine reellwertige Funktion $e \mapsto f(e)$ auf $E(X)$; unsere Interpretation ist die folgende: Das Rohrsystem ist mit Wasser gefüllt. $|f(e)|$ Liter pro Sekunde fließen von e^- nach e^+, wenn $f(e) > 0$, bzw. von e^+ nach e^-, wenn $f(e) < 0$.

Wir sprechen von einem Fluß von $a \in X$ nach $b \in X$, wenn mit einer konstanten Rate von R Litern pro Sekunde ($R > 0$) beim Knoten a Wasser in das (schon vorher gefüllte) Rohrsystem hineingepumpt und beim Knoten b wieder abgezapft wird (in der elektrischen Interpretation wird der Pluspol einer Batterie in a und der Minuspol in b angelegt). Um wirklich von einem Fluß sprechen zu können, muß in jedem Knoten soviel Wasser ankommen wie wegfließt; dabei ist das Rohrsystem überall geschlossen, mit Ausnahme der Knoten a (Eingang) und b (Ausgang). Formal heißt das, daß für jeden Knoten x des Rohrsystems

$$\sum_{e:e^+=x} f(e) - \sum_{e:e^-=x} f(e) = \begin{cases} -R\,, & \text{wenn} \quad x = a \\ 0\,, & \text{wenn} \quad x \neq a, b \\ R\,, & \text{wenn} \quad x = b \end{cases}$$

gilt: dies ist das *erste Kirchhoffsche Gesetz.* Die *Energie* des Flusses f ist die Zahl

$$En(f) = \sum_{e \in E(X)} f(e)^2$$

Etwas schwieriger Platz in unserer Vorstellungswelt (soferne wir das Unendliche schon akzeptiert haben) hat ein Fluß von $a \in X$ nach Unendlich, bei dem mit konstanter Rate von R Litern pro Sekunde ($R > 0$) Wasser beim Knoten a in das Rohrsystem hineingepumpt wird, aber an keinem anderen Knoten abgezapft wird (also "nach ∞ fließt"). Formal bedeutet das

$$\sum_{e:e^+=x} f(e) - \sum_{e:e^-=x} f(e) = \begin{cases} -R\,, & \text{wenn} \quad x = a \\ 0\,, & \text{wenn} \quad x \neq a\,. \end{cases}$$

Kann ein Fluß von a nach ∞ mit endlicher Energie existieren? In einem endlichen Rohrsystem bedarf es natürlich einer unendlichen Anstrengung, um Flüssigkeit in die bereits gefüllten Rohre hineinzupumpen, ohne sie anderswo abzuzapfen. Bei unendlichen Rohrsystemen ist die (mathematische) Möglichkeit, dies zu tun, gerade ein Kriterium für die Transienz der Irrfahrt.

Satz [Lyons, 1983]: Die Irrfahrt im Graphen X ist transient genau dann wenn ein Fluß von $a \in X$ nach Unendlich mit positiver Rate und endlicher Energie existiert.

Dieser Satz gibt eine Interpretation des Problems Transienz / Rekurrenz für Irrfahrten in Graphen, die für den Mathematiker *schön* ist. Das "physikalische" Kriterium (in der Tat sind Irrfahrten in der theoretischen Physik ein aktuelles Forschungsthema) spricht die Vorstellung an, läßt sich oft zur Lösung des Problems verwenden, beleuchtet das Pólyasche Phänomen von anderer Seite und stellt es in eine weitere Perspektive.

Transienz bedeutet also, das man in das gefüllte Rohrsystem immmer weiter Wasser hineinpumpen kann, und zwar mit endlichem Energieaufwand pro Zeiteinheit. Der Graph ist so stark verzeigt, daß sich das Wasser fortwährend im Unendlichen verlieren kann.

Wir wollen nun sehen, wie man das Flußkriterium andwenden kann, um Rekurrenz, bzw. Transienz der Irrfahrt in verschiedenen Graphen nachzuweisen. Will man Rekurrenz zeigen, so muß man nachprüfen, daß jeder Fluß von einem ausgewählten Knoten nach Unendlich auch unendliche Energie haben muß; wir können dabei annehmen, daß die Rate $R = 1$ ist. Um Transienz zu zeigen, genügt es, ein einziges Beispiel für einen Fluß von einem geeigneten Knoten nach Unendlich zu "erfinden", der endliche Energie hat.

Beispiel 5: Irrfahrt entlang der unendlichen Straße. Hier kennen wir schon die Antwort. Als Ausgangspunkt wählen wir die Position 0, und die Kanten werden so orientiert, daß sie von 0 wegzeigen. Sei f ein Fluß von 0 nach ∞ mit Rate $R = 1$. Wenn t der Wert des Flusses von 0 zur Position 1 ist, so muß der Fluß von 0 nach -1 den Wert $1 - t$ haben. Da es keine Verzweigungen gibt, muß entlang den Kanten von 1 nach 2, 2 nach 3, usw., die Quantität t weiterfließen. Genauso fließt von -1 nach -2, -2 nach -3, usw., die Quantität $(1 - t)$. Die Energie von f ist also

$$t^2 + (1-t)^2 + t^2 + (1-t)^2 + t^2 + (1-t)^2 + \ldots = \infty\,,$$

da nicht gleichzeitig $t = 0$ und $1 - t = 0$ sein kann. Jeder Fluß von 0 nach Unendlich hat also unendliche Energie, und die Irrfahrt ist rekurrent.

Beispiel 6: zweidimensionales Straßennetz. Das ist natürlich etwas komplizierter als der eindimensionale Fall des letzten Beispiels, und bedarf einiger Vorbereitungen. In einem zusammenhängenden Graphen X kann man eine Distanz definieren: sind x und y zwei Knoten, so können wir für jeden Weg von x nach y die Kanten zählen, dies ist die Weglänge. Die Distanz von x zu y ist die kleinste unter diesen Weglängen.

Im zweidimensionalen Gitter wählen wir nun als Ausgangsknoten den Nullpunkt. Mit S_n bezeichnen wir die Menge der Punkte in Distanz n vom Nullpunkt, und E_n bezeichne die Kanten zwischen S_n und S_{n+1}. Wir orientieren diese Kanten "nach außen" (vom Nullpunkt wegweisend). Die Anzahl der Elemente in E_n ist $|E_n| = 8n + 4$. Nun sei f ein Fluß von 0 nach Unendlich mit Rate $R = 1$. Wegen dem ersten Kirchhoffschen Gesetz, das ja besagt, daß das hineingepumpte Wasser an keinem Knoten des Rohrsystems verloren gehen kann, muß auch der Gesamtfluß zwischen S_n und S_{n+1} den Wert 1 haben, also $\sum_{e \in E_n} f(e) = 1\,.$

Wir verwenden nun die Ungleichung von Cauchy-Schwarz: für beliebige reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ ist

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 \leq k \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i^2\,.$$

Für unseren Fluß f erhalten wir

$$\begin{aligned} En(f) &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{e \in E_n} f(e)^2 \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|E_n|} \left(\sum_{e \in E_n} f(e) \right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8n+4} \cdot 1 = \infty \end{aligned}$$

Dieses Argument läßt sich auf allgemeinere Graphen als das zweidimensionale Gitter anwenden: S_n und E_n können genauso definiert werden. Das *Wachstum* des Graphen spielt eine wichtige Rolle: wenn $|S_n| \leq C \cdot n$ für eine Konstante C und alle $n = 1, 2, \ldots$, so ist die Irrfahrt rekurrent.

Beispiel 7: dreidimensionales Straßennnetz. Das Argument von vorhin läßt sich nicht anwenden, da die Anzahl der Elemente von S_n hier die Größenordnung n^2 hat und die Reihe $\sum 1/n^2$ konvergiert.

Der folgende "Baum" kann in das dreidimensionale Straßennetz eingebettet werden [Gerl, 1984], [Doyle und Snell, 1984] (das ist allerdings nicht ganz einfach):

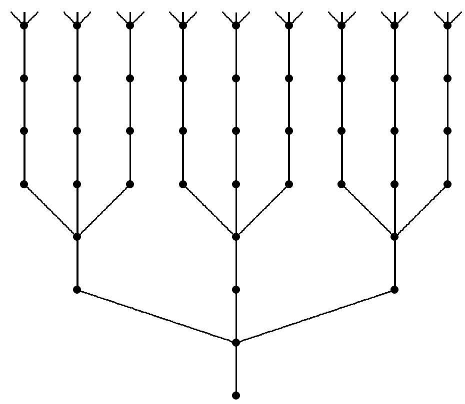


Abbildung 6.6

Wir orientieren die Kanten vom Wurzelknoten weg (in Abbildung 6.6 aufwärts) und wählen den möglichst einfachen Fluß: in jedem Verzeigungspunkt wird die von unten hereinkommende Wassermenge zu gleichen Teilen in die herausgehenden Rohre (Kanten) weitergeleitet. Die Energie dieses

Flusses vom Wurzelknoten nach Unendlich ist

$$En(f) = 1 + 6 \cdot \frac{1}{3^2} + 36 \cdot \frac{1}{9^2} + \ldots = \sum_{n+0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < \infty\,.$$

Dieser Fluß kann auch als Fluß im dreidimensionalen Gitter aufgefaßt werden: entlang der nicht vom Baum erfaßten Kanten fließt gar nichts, also die Quantität 0. Daher ist die Irrfahrt im dreidimensionalen Gitter transient.

Wir haben hier eine Folgerung aus dem Flußkriterium verwendet: ist die Irrfahrt in einem Graphen rekurrent, so ist auch die Irrfahrt in jedem Teilgraphen (einen Teilgraphen erhält man durch weglassen von Knoten und / oder Kanten) rekurrent. Das ist zwar von Anfang an plausibel, aber nicht unmittelbar klar: die Übergangswahrscheinlichkeiten sind im Teilgraphen anders. Umgekehrt folgt aus der Transienz der Irrfahrt in einem Teilgraphen die Transienz der Irrfahrt im ursprünglichen Graphen.

Da das dreidimensionale Gitter ein Teilgraph aller höherdimensionalen Gitter ist, können wir auf diese Weise die Transienz der Irrfahrten in den letzteren folgern.

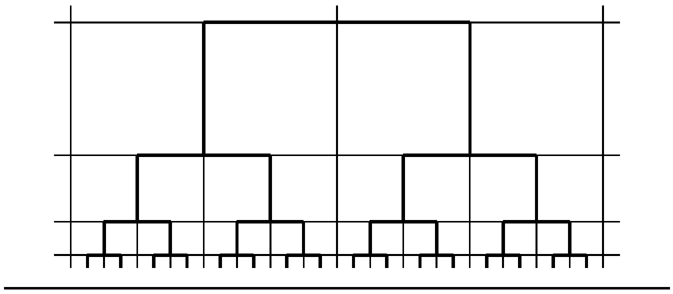


Abbildung 6.7

Beispiel 8: der reguläre Baum. Ein *Baum* ist ein Graph, in dem es keine Kreise gibt. Der *reguläre* Baum vom Grad q ist der Baum, in dem alle Knoten die gleiche Anzahl q von Nachbarn haben. Die Abbildung 6.4 weiter oben zeigt den homogenen Baum vom Grad 3.

Es ist ganz einfach zu sehen, daß die Irrfahrt im regulären Baum transient ist, wenn $q \geq 3$. Wir wählen einen Wurzelknoten a und orientieren alle Kanten von a weg. Den Fluß f definieren wir auf die einfachste Art: $1/q$ für die Kanten, die von a ausgehen, $1/q(q-1)$ für die von ihren Endpunkten ausgehenden Kanten, usw., also $f(e) = 1/q(q-1)^{n-1}$ für Kanten e in E_n mit $n \geq 1$. Dann ist

$$En(f) = q \cdot \frac{1}{q^2} + q(q-1) \cdot \frac{1}{[q(q-1)]^2} + \ldots + q(q-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{[q(q-1)^{n-1}]^2} + \ldots < \infty\,.$$

Auf ganz ähnliche Weise können wir die Transienz der Irrfahrt im Graphen der Abbildung 6.5 überlegen. Stellen wir zur Sicherheit klar, wie dieser Graph aufgebaut ist. Er füllt die obere Halbebene aus. Wir beginnen mit einem Quadrat der Seitenlänge 1, dessen linker unterer Eckpunkt die Koordinaten $(0, 1)$ hat. Links und rechts an dieses Quadrat schließen wir eine Abfolge unendlich vieler Quadrate der gleichen Form an. An diesen Streifen von Quadraten schließen wir oben und unten weitere Streifen von Quadraten an, und zwar oben mit der doppelten und unten mit der halben Seienlänge. Wir fahren so fort, sodaß nach oben die Quadrate immer größer und nach unten immer kleiner werden.

Übrigens ist dieser Graph ein diskretes Modell der hyperbolischen (oder Poinaréschen) Ebene.

Es ist nun recht einfach, in diesen Graphen einen Baum einzubetten, für den man die Transienz der Irrfahrt ganz ähnlich wie für den regulären Baum sehen kann, siehe Abbildung 6.7.

Das Flußkriterium hat ein analytisches Analogon in der Differentialgeometrie, das schon länger bekannt ist (Kelvin - Nevanlinna - Royden); [Royden, 1952]. Davon inspiriert, wurde es für Irrfahrten (reversible Markovketten) 1983 von T. Lyons bewiesen, der mit dieser Arbeit (unter anderen) bekannt wurde.

Davor wurde es aber schon [Yamasaki, 1979] publiziert (nur für lokalendliche Graphen, wie hier), aber erstens gab Yamasaki keine probabilistische Interpretation und beschränkte sich auf eine sehr trockene, formale Präsentation, und zweitens publizierte er es in einer eher sekundären japanischer Fachzeitschrift. Dort blieb seine Arbeit bis 1988 unbemerkt. Ich schreibe mir den "Verdienst" zu, 1988 diese und andere Arbeiten von Yamasaki rein zufällig "entdeckt" und anderen Kollegen weitergegeben zu haben...

Schon viel früher hatte ein anderer englischer Mathematiker [Nash-Williams, 1959] den Zusammenhang zwischen Irrfahrten und elektrischen Netzwerken aufgezeigt und zum Studium des Polyaschen Phänomens verwendet. Lyons greift darauf zurück.

Die Arbeit von Nash-Williams blieb aber für lange Jahre mehr oder weniger unbeachtet. Die Gründe sind sein komplizierter Stil und die schwer verständliche Notation, und das damals geringere Interesse der Fachwelt an dieser Art von Fragestellung. ("Die Zeit war noch nicht reif.")

Hier wäre ein längerer Diskurs möglich über das Thema, wie Mathematik von anderen Mathematikern rezipiert wird. Wie man sieht, spielen Zeitpunkt, Fachzeitschrift, Stil der Arbeit, und auch Zufall eine große Rolle! Zurück zu den Irrfahrten. Nun haben wir eine allgemeinere Theorie, und damit eine andere / bessere / neue / ... Optik, mit der wir das Phänomen der Rekurrenz / Transienz im 2-, bzw. 3-dimensionalen Raum sehen können. Daraus entstehen aber eher mehr neue Fragen als weniger. Zum Beispiel

1. Hat jeder transiente Graph einen transienten Teilbaum? (Antwort: nein, es gibt ein Gegenbeispiel [McGuinness, 1988])

2. Im d-dimensionalen Gitter haben wir die Asymptotik (Größenordnung, wenn $n \to \infty$) von $p^{(n)}(0,0) = \mathrm{W}[Z_n = 0 \mid Z_0 = 0]$ verwendet, also der Wahrscheinlichkeit, nach n Schritten wieder am Ausgangspunkt 0 zu sein. Eine allgemeinere Frage, über die viel gearbeitet wurde und wird, ist: Wie hängt die Struktur des Graphen X mit der Asymptotik von $p^{(n)}(x,x)$ zusammen, wobei x ein Knoten von X ist?

3. Im transienten Fall strebt die Irrfahrt Z_n im Raum "nach Unendlich". Kann man mögliche "Grenzpunkte" im Unendlichen besser unterscheiden? Hier geht es um das Studium von Kompaktifizierungen, sogenannten harmonischen Funktionen, usw.

4. Wie kann man insbesondere einem Graphen in der Ebene (*planaren* Graphen) ansehen, ob die Irrfahrt in ihm rekurrent / transient ist?

   usw.

Isoperimetrische Ungleichungen

Das Studium von *isoperimetrischen Ungleichungen* ermöglicht die Antwort auf einige der vorhin aufgeworfenen Fragen. Für einen Körper im d-dimensionalen Raum vergleicht eine solche Ungleichung sein Volumen mit seiner Oberfläche; die Kugel vom Radius r in d Dimensionen hat Volumen und Oberfläche von der Größenordnung r^d und r^{d-1}, also Volumen$^{1-1/d} \simeq$ Oberfläche.

Für eine Menge A von Knoten eines Graphen X muß man erst die Begriffe "Volumen" und "Oberfläche" definieren. Das *Volumen* von A ist die

Summe über die Knotengrade in A: $\mathrm{Vol}(A) = \sum_{x \in A} \deg(x)$. Der *Rand* ∂A von A ist die Menge aller Kanten des Graphen, die aus A herausführen (also einen Endpunkt in A und den anderen außerhalb haben), und die *Oberfläche* von A ist die Anzahl dieser Kanten: $\mathrm{Area}(\partial \mathrm{A}) = |\partial A|$. Für eine Zahl d, $1 \leq d \leq \infty$, sagt man, daß der Graph X eine d-dimensionale isoperimetrische Ungleichung, in Symbolen (IS_d), erfüllt, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, sodaß für jede endliche Menge $A \subset X$

$$\mathrm{Area}(\partial \mathrm{A}) \geq c \cdot \mathrm{Vol}(A)^{1-1/d}.$$

Wenn speziell $d = \infty$ ($1/d = 0$), so spricht man von einer "starken isoperimetrische Ungleichung" (IS): Volumen und Oberfläche sind von der gleichen Größenordnung.
Beispiele: Das d-dimensionale Gitter erfüllt (IS_d), aber nicht $(IS_{d'})$ für $d' > d$. Der reguläre Baum (Abbildung 6.4) erfüllt (IS). Hier sind einige Resultate, die den Zusammenhang zwischen isoperimetrischen Ungleichungen und dem Verhalten von Irrfahrten in Graphen erhellen:

Satz [Thomassen, 1992]: Falls X (IS_d) mit $d > 2$ erfüllt, so enthält X einen transienten Baum.

Unter einer (in gewissem Sinne kleinen) Einschränkung gibt es also doch eine positive Antwort auf die Frage (1) von oben.

Satz [Varopoulos, 1984]: Wenn X die Ungleichung (IS_d) erfüllt (wobei $1 \leq d < \infty$), so gilt für alle x, y in X

$$p^{(n)}(x,y) \leq C \cdot \deg(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{n^d}}.$$

Wir erinnern, daß $p^{(n)}(x,y)$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß sich der Irrfahrer n Schritte nach dem Start in x im Knoten y befindet. Dieser sehr wichtige und schwierig zu beweisende Satz gibt eine Antwort auf die Frage (2).

Satz [Dodziuk, 1984], [Gerl, 1988]: X erfüllt (IS) genau dann wenn $\rho < 1$ existiert, sodaß für alle Knoten x in X

$$p^{(n)}(x,x) \leq \rho^n.$$

Dies impliziert natürlich Tranienz der Irrfahrt, da dann $\sum_n p^{(n)}(x,x) < \infty$, also der Erwartungswert $\mathrm{E}(N)$ endlich ist, wobei – wir erinnern – die Zufallsgröße N die Anzahl der Besuche in x bei Start in x ist.

Sei $\mathcal{O}$ offenes, einfach zusammenhängende Gebiet in der Ebene (also zusammenhängend und ohne Löcher), z.B. die ganze Ebene, die obere Halbebene oder eine offene Kreisscheibe.

Eine *Pflasterung* oder *Kachelung* von $\mathcal{O}$ besteht aus einer Familie $\mathcal{T}$ von abgeschlossenen topologischen Kreisscheiben (also Mengen, die stetig zu einer Kreisscheibe deformiert werden können; diese sind die "Pflastersteine", bzw. "Kacheln") mit paarweise fremdem Inneren, die zusammen das Gebiet O bedecken. Wir nehmen zusätzlich an, daß jede beschränkte Menge in $\mathcal{O}$ nur endlich viele Kacheln $T \in \mathcal{T}$ trifft.

Wir ordnen der Pflasterung den *Kantengraph* $X = X(\mathcal{T})$ zu. Das ist einfach der Graph, den wir sehen, wenn wir die Pflasterung anschauen: die Knoten sind die Punkte, wo sich drei oder mehr Kacheln treffen, die Kanten sind die Randstücke von Kacheln, die zwischen den Knoten liegen. Der Graph von Abbildung 6.5 ist der Kantengraph einer Kachelung der oberen Halbebene; die Kacheln (Quadrate) sind eigentlich Fünfecke, da auf jedem von ihnen 5 Knoten liegen.

Wie kann man dem Kantengraph X einer Pflasterung ansehen, ob die Irrfahrt transient ist? Man kann über (IS) entscheiden und erhält so eine hinreichende Bedingung.

Definition. *Die charakteristische Zahl einer Kante $e \in E(X)$, bzw. eines Knotens $x \in X$, beziehungsweise einer Kachel $T \in \mathcal{T}$ ist*

$$\phi(e) = 1 - \sum_{x \in e} \frac{1}{\deg(x)} - \sum_{T: e \in E(T)} \frac{1}{|T|},$$

$$\psi(x) = \frac{\deg(x)}{2} - 1 - \sum_{T: x \in T} \frac{1}{|T|},$$

$$\chi(T) = \frac{|T|}{2} - 1 - \sum_{x: x \in T} \frac{1}{\deg(x)}.$$

Dabei ist $|T|$ die Anzahl der Knoten von X, die auf T liegen. Weiters steht $E(T)$ für jene Kanten, die am Rand der Kachel T liegen, $\sum_{T: e \in E(T)}$ bedeutet z.B., daß über alle Kacheln summiert wird, auf denen die Kante e liegt, und $|T|$ steht für die Anzahl der Knoten von X die auf T liegen.

Satz [Woess, 1998]: Falls $\phi(e) > 0$ für alle Kanten $e \in E(X)$,
oder $\psi(x) > 0$ für alle Punkte $x \in X$,

oder $\chi(T) > 0$ für alle Pflastersteine $T \in \mathcal{T}$,
so erfüllt $X(\mathcal{T})$ die starke isoperimetrische Ungleichung.

Der Beweis dieses Satzes verwendet die Eulersche Formel für endliche Graphen in der Ebene.

Beispiel 9. Für den Graphen aus Abbildung 6.5 ist $|T| = 5$ für jede Kachel T, und auf jedem T liegen 3 Knoten mit Grad 4 und 2 Knoten mit Grad 3. Daher ist $\chi(T) = \frac{5}{2} - 1 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ stets positiv. Auch haben wir $\psi(e) = \frac{1}{60}$ für jede Kante. Der Graph erfüllt die starke isoperimetrische Ungleichung, und die Irrfahrt ist transient, wie wir schon wissen. (Allerdings ist $\psi(x) = -\frac{1}{10}$ für die Knoten mit Grad 3.)

Beispiel 10. Das zweidimensionale Straßennetz (Gitter) ist der Kantengraph einer Pflasterung der ganzen Ebene mit Vierecken. In jedem Knoten treffen sich 4 Vierecke. Wir wissen, daß die Irrfahrt rekurrent ist, und in der Tat prüft man leicht nach, daß keine der drei Bedingungen des Satzes erfüllt ist.

Versuchen Sie nun, sich einen Graphen vorzustellen, wo sich in jedem Knoten nicht 4 Vierecke, sondern 8 Achtecke treffen. Diese müssen nicht unbedingt gleichmäßig sein, und die Kanten müßen nicht unbedingt gerade sein. Trotzdem ist es nicht ganz leicht, so diesen Graphen zu zeichnen. Man kann ihn als Kachelung einer offenen Kreisscheibe erhalten, die Kanten sind dann Kreisbögen, die zum Rand der Kreisscheibe rechtwinkelig sind. In der Nähe des Randes werden die Achtecke immer kleiner. Für jede Kachel (Achteck) T ist $\chi(T) = 2$. Also erfüllt der Graph die starke isoperimetrische Ungleichung. Es ist dies eine typische Kachelung der hyperbolischen Ebene, also der Kreisscheibe mit der Poincaréschen Metrik; die Kacheln sind in der hyperbolischen Geometrie alle kongruent.

Schlußbemerkungen

Die Kunstwelt und ihre "Körpersprache" sind mir nicht unvertraut. In den 80er Jahren hatte ich eine bescheidene "Zweitkarriere" in der künstlerischen Fotografie (Autorenfotografie), war Mitbegründer einer Fotogalerie in Salzburg und habe später einige Fotoausstellungen in Leoben organisiert. Bis kurz vor meiner Habilitierung war ich stolz darauf, gleich viele Ausstellungen meiner Fotoarbeiten wie mathematische Publikationen vorweisen zu können. Erst mit dem Umzug nach Italien hat sich das Gewicht endgültig zugunsten der Mathematik verlagert.

Einer der Kunsttheoretiker hat in seinem Vortrag beim Symposium angemerkt, wie überrascht er gewesen war, zu erfahren, daß sich Naturwissenschafter beim Austausch ihrer Forschungsergebnisse bemühen, eine möglichst einfache Sprache zu verwenden. In diesem Sinne beabsichtige ich mit meinem Text nicht, rhetorische Brillanz zu versprühen und durch komplizierte Wort- und Satzwahl zu beeindrucken.

Ich habe vielmehr in diesen Ausführungen versucht, auf möglischst einfache Weise einige Aspekte eines aktuellen Forschungsgebietes zu *erklären,* ohne dabei auf schwierigere Beweise einzugehen. Beweise sind das Um und Auf der sogenannten "reinen" Mathematik, und haben ihre eigene Ästhetik. *Schönheit* bezieht sich dabei auf die Architektur des Gedankengebäudes.

Literatur

[Dodziuk, 1984] Dodziuk, J. (1984). Difference equations, isoperimetric inequality, and transience of certain random walks. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284, 787–794.

[Gerl, 1984] Gerl, P. (1984). *Rekurrente und transiente Bäume*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire (IRMA Strasbourg), 10, 80–87.

[Gerl, 1988] Gerl, P. (1988). Random walks on graphs with a strong isoperimetric inequality. *Journal of Theoretical Probability*, 1, 171–187.

[McGuinness, 1988] McGuinness, S. (1988). *Random Walks on Graphs and Digraphs.* Dissertation, University of Waterloo, Ontario.

[Lyons, 1983] Lyons, T. (1983). A simple criterion for transience of a reversible Markov chain. *Annals of Probability*, 11, 393–402.

[Pólya, 1921] Pólya, G. (1921). Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Mathematische Annalen*, 84, 149–160.

[Royden, 1952] Royden, H. L. (1952). Harmonic functions on open Riemann surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 73, 40–94.

[Thomassen, 1992] Thomassen, C. (1992). Trees, ends, and transience. In *Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory* (Proceedings, Frascati 1991; Picardello, M. A., Hrsg.), Plenum, New York, 259–266.

[Varopoulos, 1984] Varopoulos, N. Th. (1984). Isoperimetric inequalities and Markov chains. *Journal of Functional Analysis*, 63, 215–239.

[Woess, 1998] Woess, W. (1998). A note on tilings and strong isoperimetric inequality. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 124, 385–393.

[Woess, 1999] Woess W. (1999). *Random Walks on Infinite Graphs and Groups.* Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, in Druck.

[Yamasaki, 1979] Yamasaki, M. (1979). Discrete potentials on an infinite network. *Memoirs of the Faculty of Science, Shimane University*, 13, 31–44.